Master 1
Mathématiques Appliquées et Statistiques
Mathématiques et Applications
Année 2022-2023

Espace L^p, analyse de Fourier, distributions
DSI - durée 1h50, calculatrice et document interdits

Dans toutes les questions de ce devoir, on ne demande jamais de vérifier la mesurabilité des fonctions considérées.

Exercice 1. Dans cet exercice, α est un réel.

(1) Montrer que $(n+1)^\alpha - n^\alpha \sim \alpha n^{\alpha-1}$ lorsque $n \to +\infty$.

(2) On suppose que $\alpha > 0$ et on considère la suite de fonctions $(f_n)_{n\geq 1}$ où $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est définie par $f_n(x) = n^{-1/3}\mathbf{1}_{[n^\alpha,(n+1)^\alpha]}$. Déterminer, si elle existe, la limite de $(f_n)_{n\geq 1}$ dans $L^p(\mathbb{R})$ où $1 \leq p < +\infty$.

(3) On suppose que $\alpha > 0$ et on considère la suite de fonctions $(g_n)_{n\geq 1}$ où $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est définie par $g_n(x) = n^{1/3}\mathbf{1}_{[n^\alpha,(n+1)^\alpha]}$. Déterminer, si elle existe, la limite de $(g_n)_{n\geq 1}$ dans $L^p(\mathbb{R})$ où $1 \leq p < +\infty$.

Exercice 2.

(1) Montrer que si $f, g \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R})$, alors leur convolée $f * g$ est encore continue et à support compact.

(2) Montrer que si $f, g \in L^2(\mathbb{R})$ alors $f * g$ est bien défini et $f * g \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R})$.

Dans la suite de cet exercice a et b sont des réels strictement positifs. On note $\gamma_a(t) = e^{-\pi a t^2}$ pour $t \in \mathbb{R}$.

(3) Montrer que $\gamma_a \in L^1(\mathbb{R})$ et calculer $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} \gamma_a(t)\,\mathrm{d}t$.

(4) Calculer $\gamma_a * \gamma_b$.

Exercice 3. Dans l'étude d'équations aux dérivées partielles, on est souvent amené à introduire des espaces qui ressemblent aux espaces L^p mais avec des indices multiples selon la variable. Plus précisisément, on considère des espaces du type suivant : on prend deux indices $1 \leq p, q < +\infty$ et on définit $L^p_x L^q_t(\mathbb{R}\times\mathbb{R})$ comme étant l'ensemble des fonctions $f : \mathbb{R}\times\mathbb{R} \to \mathbb{C}$ mesurables telles que

$$\|f\|_{L^p_x L^q_t} = \left(\int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} |f(x,t)|^q \,\mathrm{d}t\right)^{\frac{p}{q}} \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}} < +\infty.$$

On définit de même $L^q_t L^p_x(\mathbb{R}\times\mathbb{R})$ comme étant l'ensemble des fonctions $f : \mathbb{R}\times\mathbb{R} \to \mathbb{C}$ mesurables telles que

$$\|f\|_{L^q_t L^p_x} = \left(\int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} |f(x,t)|^p \,\mathrm{d}x\right)^{\frac{q}{p}} \mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{q}} < +\infty.$$

L'objectif de cet exercice est d'étudier quelques unes des propriétés de ces espaces, en particulier, de montrer que ce sont des espaces de Banach.

(1) Sous quelles conditions sur φ, ψ, le "tenseur" $f = \varphi \otimes \psi : (x,t) \to \varphi(x)\psi(t)$ appartient-il à $L^p_x L^q_t(\mathbb{R}\times\mathbb{R})$?

TOURNER LA PAGE SVP

(2) Soit $(\tilde{p},\tilde{q}) \neq (p,q)$. Construire une fonction $f \in L^p_x L^q_t(\mathbb{R}\times\mathbb{R})$ qui n'appartient pas à l'espace $L^{\tilde{p}}_x L^{\tilde{q}}_t(\mathbb{R}\times\mathbb{R})$.

(3) Soit $\alpha > 0$. On considère l'esemble

$$A = \left\{ (x,t) \ : \ x \geq 0, \ 0 \leq t \leq \frac{1}{(1+x)^\alpha} \right\}$$

et $f = \mathbf{1}_A$ la fonction caractéristique de l'ensemble A. Déterminer les couples (p,q) pour lesquels $f \in L^p_x L^q_t(\mathbb{R}\times\mathbb{R})$ et $f \in L^q_t L^p_x(\mathbb{R}\times\mathbb{R})$.

(4) Montrer que $L^p_x L^q_t(\mathbb{R}\times\mathbb{R})$ est un espace vectoriel et que $\|\cdot\|_{L^p_x L^q_t}$ est bien une norme.

(5) Soit $(f_k)_{k\geq 1}$ une suite de $L^p_x L^q_t(\mathbb{R}\times\mathbb{R})$ et $f, F \in L^p_x L^q_t(\mathbb{R}\times\mathbb{R})$. On suppose que pour tout $k \geq 1$ et presque tout $(x,t) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}$, $|f_k(x,t)| \leq |F(x,t)|$ et $f_k(x,t) \to f(x,t)$ pour $k \to +\infty$. Montrer que f_k tend vers f dans $L^p_x L^q_t(\mathbb{R}\times\mathbb{R})$.

(6) En vous inspirant de la démonstration de la complétude de L^p, montrer que $L^p_x L^q_t(\mathbb{R}\times\mathbb{R})$ est complet.

(7) On considère maintenant p' et q' les indices duaux de p et q, *i.e.* $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{p'} = \dfrac{1}{q}+\dfrac{1}{q'} = 1$. Montrer que si $f \in L^p_x L^q_t(\mathbb{R}\times\mathbb{R})$ et $g \in L^{p'}_x L^{q'}_t(\mathbb{R}\times\mathbb{R})$ alors $fg \in L^1(\mathbb{R}\times\mathbb{R})$ avec

$$\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} |f(x,t)g(x,t)| \,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}x \leq \|f\|_{L^p_x L^q_t} \|g\|_{L^{p'}_x L^{q'}_t}.$$