Corrigé du DSI

Exercice 1 1) Un simple DL montre que $(n+1)^\alpha - n^\alpha = \alpha n^{\alpha-1} + o(n^{\alpha-1})$, ce qui prouve l'équivalent.

2) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\sup_{\mathbb{R}} |f_n| = n^{-\frac{1}{3}} \to 0$ quand $n \to +\infty$. Par conséquent, la suite (f_n) converge uniformément vers 0. Si (f_n) admet une limite dans L^p, elle est donc nécessairement nulle.

Supposons d'abord $p < \infty$. D'après la question 1), on a

$$\|f_n\|_p = n^{-\frac{1}{3}}((n+1)^\alpha - n^\alpha)^{\frac{1}{p}} = n^{-\frac{1}{3}} n^{\frac{\alpha-1}{p}} (\alpha + o(1))^{\frac{1}{p}}$$

qui tend vers 0 si et seulement si $\frac{\alpha-1}{p} - \frac{1}{3} < 0$, c'est à dire $p > 3(\alpha - 1)$.

3) Les calculs sont identiques. On en déduit que (f_n) converge dans L^p si et seulement si $p < 3(1-\alpha)$.

Exercice 2 1) Pour la continuité de $f * g$, voir le cours. De plus, on a $\mathrm{supp}(f * g) \subset \mathrm{supp}(f) + \mathrm{supp}(g)$. Comme $\mathrm{supp}(f)$ et $\mathrm{supp}(g)$ sont bornés (car compacts) alors $\mathrm{supp}(f*g)$ est aussi borné et par suite il est compact (il est fermé par définition).

2) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a par Cauchy-Schwartz

$$\int_{\mathbb{R}} |f(x-y)g(y)|dy \leq \|f\|_2 \|g\|_2 < +\infty$$

Donc $f * g(x)$ est bien définie et $\|f * g\|_\infty \leq \|f\|_2 \|g\|_2$.

Montrons que $f * g \in \mathcal{C}_0$. Comme $C_c(\mathbb{R})$ dense dans L^2, il existe des suites (f_n) et (g_n) d'éléments de $C_c(\mathbb{R})$ tels que $f_n \to f$ et $g_n \to g$ dans L^2. De plus, d'après l'inégalité ci-dessus, on a

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |f_n * g_n(x) - f * g(x)| \leq \|f_n - f\|_2 \|g_n\|_2 + \|f\|_2 \|g_n - g\|_2$$

qui montrer que $(f_n * g_n)$ converge uniformément vers $f * g$. Comme les $f_n * g_n$ sont continues alors $f * g$ est continue. Enfin, pour $\epsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\|f_n * g_n - f * g\|_\infty < \epsilon$. Comme de plus $f_N * g_N$ est à support compact, il existe $R > 0$ tel que pour tout $|x| \geq R$, $f_N * g_N(x) = 0$. On en déduit que pour tout $|x| > R$

$$|f * g(x)| \leq \|f_N * g_N - f * g\|_\infty + |f_N * g_N(x)| \leq \epsilon$$

ce qui prouve le résultat.

3) C'est ultra classique, on a $\int_{\mathbb{R}} \gamma_a = \frac{1}{\sqrt{a}}$.

4) C'est un simple calcul. En utilisant la question 3), et en reconstituant le carré dans l'exponentielle, on trouve

$$\gamma_a * \gamma_b(t) = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{\sqrt{a+b}} e^{-\pi \frac{ab}{a+b} t^2}$$

Exercice 3 Dans cet exercice on notera parfois μ la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{R}^2$ indifféremment. **1)** En utilisant le théorème de Fubini-Tonelli, il vient

$$\|\phi \otimes \psi\|_{L^p_x L^q_t} = \|\varphi\|_{L^p} \|\psi\|_{L^q}.$$

2) Soit $(\tilde{p}, \tilde{q}) \neq (p, q)$. Supposons par exemple que $p \neq \tilde{p}$. On se donne $\psi = 1_{[0,1]}$. Si $p > \tilde{p}$, on prend $\varphi(x) = \frac{1}{(1+|x|^\alpha)}$ avec $\alpha > 0$ tel que $p\alpha > 1$ et $\tilde{p}\alpha < 1$ (possible car $\tilde{p} < p$). Alors $\varphi \in L^p$ mais $\varphi \notin L^{\tilde{p}}$ et en utilisant la question 1), on obtient que $f := \varphi \otimes \psi \in L^p_x L^q_t \setminus L^{\tilde{p}}_x L^{\tilde{q}}_t$. Si on a au contraire $p < \tilde{p}$, on prend φ à support compact égale à $\frac{1}{|x|^\alpha}$ au voisinage de l'origine. On choisit α tel que $p\alpha < 1 < \tilde{p}\alpha$. Alors $\varphi \in L^p \setminus L^{\tilde{p}}$ et la fin de la preuve est identique.

Le cas $q \neq \tilde{q}$ se traite de la même manière en inversant le rôle des variables t et x.

3) On a

$$\|f(x,.)\|_{L^q_t} = \Big(\int_0^{(1+x)^{-\alpha}} dt\Big)^{\frac{1}{q}} = (1+x)^{-\frac{\alpha}{q}}$$

et par suite

$$\|f\|_{L^p_x L^q_t} = \Big(\int_0^\infty (1+x)^{-\frac{\alpha p}{q}} dx\Big)^{\frac{1}{p}}$$

qui est fini si et seulement si $\alpha p > q$. De même, on a

$$\|f(.,t)\|_{L^p_x} = \Big(\int_0^{t^{-\frac{1}{\alpha}}-1} dx\Big)^{\frac{1}{p}} = t^{-\frac{1}{p\alpha}}(1 - t^{\frac{1}{\alpha}})^{\frac{1}{p}}$$

Par suite

$$\|f\|_{L^q_t L^p_x} = \Big(\int_0^1 t^{-\frac{q}{p\alpha}}(1-t^{\frac{1}{\alpha}})^{\frac{q}{p}}dt\Big)^{\frac{1}{q}}$$

est fini si et seulement si $q < \alpha p$. On obtient donc la même condition d'intégralité.

4) Soient f, g deux éléments de $L^p_x L^q_t$ et soit $\lambda \in \mathbb{C}$. En appliquant l'inégalité de Minkowski dans la variable t, on obtient

$$\|\lambda f(.x,) + g(.,x)\|_{L^q_t} \leq |\lambda| \|f(.x,)\|_{L^q_t} + \|g(.x,)\|_{L^q_t}.$$

On applique à nouveau Minkowski aux fonctions $x \mapsto \|f(.x,)\|_{L^q_t}$ et $x \mapsto \|g(.x,)\|_{L^q_t}$, il vient

$$\|\lambda f + g\|_{L^p_x L^q_t} \leq |\lambda| \|f\|_{L^p_x L^q_t} + \|g\|_{L^p_x L^q_t}$$

Ceci montre que $L^p_x L^q_t$ est un espace vectoriel et que $\|.\|_{L^p_x L^q_t}$ vérifie l'inégalité triangulaire. L'homogénéité pour la multiplication par un scalaire est immédiate. Enfin, si $\|f\|_{L^p_x L^q_t} = 0$. Alors, il existe un ensemble négligeable N tel que pour tout $x \notin N$, $\|f(.,x)\|_{L^q} = 0$. Par suite, il existe un ensemble négligeable N' tel que

$$\forall x \notin N,\ \forall t \notin N',\ f(t,x) = 0.$$

On pose $\mathcal{N} = N \times \mathbb{R} \cup \mathbb{R} \times N'$. Alors $\mathcal{N}$ est un ensemble négligeable de $\mathbb{R}^2$ et $f = 0$ sur $\mathbb{R}^2 \setminus \mathcal{N}$, ce qui termine de prouver que $\|.\|_{L^p_x L^q_t}$ est une norme.

5) Par définition, il existe un ensemble négligeable $\mathcal{N} \subset \mathbb{R}^2$ tel que

$$\forall (x,t) \notin \mathcal{N},\ f_n(x,t) \to f(x,t) \text{ et } |f_n(x,t)| \leq F(x,t). \tag{1}$$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, notons $A_x = \{t \in \mathbb{R},\ (x,t) \in \mathcal{N}\}$ et soit $N_1 = \{x \in \mathbb{R},\ \mu(A_x) \neq 0\}$. Par Fubini-Tonelli, on a $0 = \mu(\mathcal{N}) = \int_{\mathbb{R}} \int_{A_x} dtdx = \int_{\mathbb{R}} \mu(A_x)dx$. Donc $\mu(A_x) = 0$ presque partout, c'est à dire $\mu(N_1) = 0$.

Par ailleurs, comme $F \in L^p_x L^q_t$, la fonction $G : x \mapsto \|F(x,.)\|_{L^q_t}$ appartient à L^p. En particulier, il existe un ensemble négligeable N_2 tel que pour tout $x \notin N_2$, $\|F(x,.)\|_{L^q_t} < \infty$. Autrement dit, pour tout $x \notin N_2$ la fonction $t \mapsto F(x,t)$ est dans L^q. Supposons maintenant que $x \notin N := N_1 \cup N_2$ (qui est un ensemble négligeable). Alors $\mu(A_x) = 0$ et pour tout $t \notin A_x$, on a $(t,x) \notin \mathcal{N}$ donc (1) est satisfaite. Comme $x \notin N_2$, la fonction $t \mapsto F(x,t)$ est dans L^q_t et on peut donc appliquer le théorème de convergence dominée à la suite de fonctions $(f_n(x,.))$. Par suite

$$\forall x \notin N,\ \|f_n(x,.) - f(x,.)\|_{L^q_t} \to 0 \tag{2}$$

ce qui prouve (2). Par ailleurs, on déduit facilement des hypothèses que

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus N,\ \|f_n(x,.) - f(x,.)\|_{L^q_t} \leq 2\|F\|_{L^q_t} \tag{3}$$

Comme la fonction $x \mapsto \|F(x,.)\|_{L^q_t}$ est dans L^p, on peut appliquer le théorème de convergence dominée à la suite de fonctions $x \mapsto \|f_n(x,.) - f(x,.)\|_{L^q_t}$, ce qui montre que $\|f_n(x,.) - f(x,.)\|_{L^p_x L^q_t} \to 0$.

6) Soit (f_n) une suite de Cauchy dans $L^p_x L^q_t$. Quitte à extraire une sous-suite, on peut supposer que

$$\forall n \geq 1,\ \|f_{n+1} - f_n\|_{L^p_x L^q_t} < 2^{-n}. \tag{4}$$

Pour $N \in \mathbb{N}^*$, on définit $g_N(t,x) = \sum_{n=1}^N |(f_{n+1} - f_n)(t,x)|$. Alors par Minkowski $g_N \in L^p_x L^q_t$ et $\|g_N\|_{L^p_x L^q_t} \leq \sum_{n=1}^N 2^{-n} < 2$ c'est à dire

$$\int_{\mathbb{R}} \Big| \int_{\mathbb{R}} |g_N(t,x)|^q dt \Big|^{\frac{p}{q}} dx < 2^p$$

D'après le théorème de convergence monotone, il existe un ensemble négligeable N_1 tel que

$$\forall x \notin N_1,\ \sup_{N \geq 1} \int_{\mathbb{R}} |g_N(t,x)|^q dt < +\infty.$$

En appliquant une deuxième fois le thèorème de convergence monotone, on obtient un ensemble N_2 négligeable tel que

$$\forall x \notin N_1,\ \forall t \notin N_2,\ \sup_{N \geq 1} |g_N(t,x)| < +\infty.$$

On pose $\mathcal{N} = N_1 \times \mathbb{R} \cup \mathbb{R} \times N_2$ qui vérifie $\mu(\mathcal{N}) = 0$ et pour tout $(x,t) \notin \mathcal{N}$, $\sup_{N \geq 1} |g_N(t,x)| < +\infty$. On pose $G(x,t) = 1_{\mathcal{N}^c}(x,t) \sup_N g_N$. Alors par convergence monotone, $G \in L^p_x L^q_t$ et $\|G\|_{L^p_x L^q_t} \leq 2$.

De plus sur $\mathcal{N}^c$ la série $\sum |f_{n+1} - f_n|$ converge donc la série $\sum (f_{n+1} - f_n)$ converge aussi. Par suite $(f_n(t,x))$ converge pour tout $(x,t) \notin \mathcal{N}$ vers une limite f et on a $|f_n| \leq |f_1| + G \in L^p_x L^q_t$. On peut donc appliquer le résultat de la question 5) qui montre que $f_n \to f$ dans $L^p_x L^q_t$.

7) Par Hölder, on a

$$\int |f(t,x)g(t,x)| dt \leq \|f(.,x)\|_{L^q_t} \|g(.,x)\|_{L^q_t}$$

et une deuxième application de Hölder montre que

$$\int\int |f(t,x)g(t,x)| dtdx \leq \int \|f(.,x)\|_{L^q_t} \|g(.,x)\|_{L^q_t} dx \leq \|f(.,x)\|_{L^p_x L^q_t} \|g(.,x)\|_{L^p_x L^q_t}$$