Master 1
Mathématiques Appliquées et Statistiques
Mathématiques et Applications
Année 2024-25

Espace L^p, analyse de Fourier
Devoir Maison

Exercice 1. On note $\mathcal{C}_{2\pi}$ l'espace des fonctions continues sur $\mathbb{R}$, 2π-périodiques et pour $p \in [1, +\infty[$, $L^p_{2\pi}$ l'espaces des fonctions f mesurables sur $\mathbb{R}$, 2π-périodiques telles que $\|f\|_{p,2\pi} < +\infty$, où

$$\|f\|_{p,2\pi} := (\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(t)|^p dt)^{\frac{1}{p}}.$$

Dans toute la suite, on notera aussi

$$\langle f \rangle = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)dx$$

(1) Montrer que pour tout $f \in L^p_{2\pi}$, $\langle f \rangle$ est bien définie.

(2) Montrer que pour tout $f \in L^1_{2\pi}$ et pour tout $a \in \mathbb{R}$, on a $\int_0^{2\pi} f(t)dt = \int_a^{a+2\pi} f(t)dt$.

(3) On définit

$$f * g(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(y)g(x-y)dy$$

Montrer que pour tout $f, g \in \mathcal{C}_{2\pi}$, $f * g$ est bien définie et $f * g \in \mathcal{C}_{2\pi}$.

(4) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit

$$D_n(x) = \sum_{k=-n}^{n} e^{ikx}, \quad x \in [0, 2\pi]$$

et

$$K_n(x) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} D_k(x), \quad x \in [0, 2\pi]$$

Montrer D_n et K_n appartiennent à $\mathcal{C}_{2\pi}$ et que que $\langle D_n \rangle = \langle K_n \rangle = 1$.

(5) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$D_n(x) = \frac{\sin((n+\frac{1}{2})x)}{\sin(\frac{x}{2})} \quad \text{et} \quad K_n(x) = \frac{1}{n}\Big(\frac{\sin(\frac{nx}{2})}{\sin\frac{x}{2}}\Big)^2$$

(6) Montrer que pour tout $\delta > 0$, on a

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{x\in[0,2\pi]\setminus[-\delta,\delta]} K_n(x)dx = 0$$

(7) Montrer que pour tout $f \in \mathcal{C}_{2\pi}$, la suite de fonctions $(f * K_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge uniformément vers la fonction f sur $\mathbb{R}$.

(8) On suppose que la suite $(f * D_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge uniformément vers une fonction g. Montrer que $g = f$.

(9) On appelle polynôme trigonométrique toute combinaison linéaire finie des fonctions $x \mapsto e^{ikx}$, $k \in \mathbb{Z}$. Montrer que l'ensemble des polynômes trigonométriques est dense dans $\mathcal{C}_{2\pi}$ muni de la norme $\|.\|_\infty$.

(10) Montrer que l'ensemble des polynômes trigonométriques est dense dans $L^p_{2\pi}$ muni de la norme $\|.\|_p$.

Exercice 2. Dans cet exercice, on note $\langle \xi \rangle = (1+|\xi|^2)^{\frac{1}{2}}$. Pour tout $s \geq 0$ on définit l'espace $H^s(\mathbb{R}) := \{u \in L^2(\mathbb{R}),\ \langle \xi \rangle^s \hat{u} \in L^2(\mathbb{R})\}$. On munit H^s du produit scalaire

$$\langle u, v \rangle_s = \int_{\mathbb{R}} \langle \xi \rangle^{2s} \hat{u}(\xi) \overline{\hat{v}(\xi)} d\xi.$$

On utilisera aussi l'espace des fonctions continues bornées muni de la norme $\|f\|_\infty = \sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x)|$.

(1) Identifier l'espace $H^0(\mathbb{R})$

(2) Montrer que $(H^s(\mathbb{R}), \langle ., . \rangle_s)$ est un espace de Hilbert

(3) Montrer que $\mathscr{S}(\mathbb{R}) \subset H^s(\mathbb{R})$ pour tout $s > 0$.

(4) Montrer que pour $s > \frac{1}{2}$, $\hat{u} \in L^1(\mathbb{R})$.

(5) En déduire que pour tout $s > \frac{1}{2}$, $H^s(\mathbb{R})$ s'injecte continument dans $\mathcal{C}_b(\mathbb{R})$.

(6) Montrer que $u \in H^1(\mathbb{R})$ si et seulement si il existe une fonction $v \in L^2(\mathbb{R})$ telle que pour tout $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$, $\int u\overline{\varphi'} = -\int v\overline{\varphi}$. Que vaut v lorsque $u \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$? On notera par la suite $v = \delta u$. Que vaut $\widehat{\delta u}$?

(7) Soit $f \in L^2(\mathbb{R})$. On cherche à résoudre l'équation

$$u - \partial_x^2 u = f. \tag{H}$$

   (a) On pose $u(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int e^{ix\xi} \frac{\hat{f}(\xi)}{1+\xi^2} d\xi$. Montrer que $u \in H^2(\mathbb{R})$ et que $u - \delta\delta u = f$.

   (b) On suppose qu'il existe $r > 0$ tel que $f \in H^{1+r}(\mathbb{R})$. Montrer que $u \in C^2(\mathbb{R})$ et que u est solution de (H)