Master 1
Mathématiques et Applications
Année 2025-26

Espace L^p, analyse de Fourier

Devoir Maison

À rendre mardi 7 octobre 2025

Exercice 1. On rappelle que, pour un espace métrique quelconque (X,d) et une mesure de probabilité $\mu : \mathcal{B}_X \to [0,1]$, l'ensemble des fonctions continues bornées $C_b^0(X,\mathbb{R})$ est dense dans $L^1(X,\mathbb{R},\mu)$. Déterminer $C_c^0(X,\mathbb{R})$ pour $X = \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$. Soit $\mu : \mathcal{B}_X \to [0,1]$ une mesure de probabilité. Est-ce que $C_c^0(X,\mathbb{R})$ est dense dans $L^1(X,\mathbb{R},\mu)$? Justifiez la réponse.

Exercice 2. Soient μ et ν deux mesures (σ-additive) sur $\mathbb{R}^+$ telles qu'il existe $p_0 \in \mathbb{R}$ tel que

$$\forall\, p \geq p_0,\ \int_0^{+\infty} e^{-px}\,\mu(dx) = \int_0^{+\infty} e^{-px}\,\nu(dx) < +\infty.$$

On cherche à montrer que $\mu = \nu$.

(1) On rappelle qu'une algèbre de fonctions continues est un sous espace vectoriel de $C_b^0(X,\mathbb{R})$ stable par multiplication. Énoncer le théorème de Stone-Weierstrass de densité des algèbres de fonctions continues sur les espaces compacts X.

(2) On suppose ici que μ et ν sont des mesures de probabilité et que $p_0 = 0$. Montrer alors que $\mu = \nu$.

(3) Conclure dans le cas général où p_0 est quelconque et μ et ν sont seulement σ-additives.

(4) On note

$$\mathcal{E}_{p_0} := \Big\{ f :]0,+\infty[\to \mathbb{R} : f \text{ est mesurable et } \int_0^{+\infty} e^{-p_0 x} |f(x)|\,dx < +\infty \Big\} / \sim,$$

quotienté par la relation d'équivalence $f \sim g \iff \mathrm{Leb}(\{f \neq g\}) = 0$. On appelle transformée de Laplace de $f \in \mathcal{E}_{p_0}$, notée $\mathcal{L}[f]$, la fonction

$$\forall\, f \in \mathcal{E}_{p_0},\ \forall\, p \geq p_0,\ \mathcal{L}[f](p) = \int_0^{+\infty} e^{-px} f(x)\,dx.$$

Montrer que le transformée de Laplace est injective.