Année Universitaire 2024-2025

Parcours : Master 1 **Cours :** L^p, Fourier, Distribution **Code :** 4TMA711U
Épreuve : Devoir surveillé intermédiaire
Date : 23/10/2024 **Heure :** 9h30 **Durée :** 2 heures

Les notes de cours ne sont pas autorisées. La calculette Bordeaux est autorisée. Les exercices sont de difficulté croissante.

Exercice 1 (Question de cours)**.** *Répondre par vrai ou faux aux énoncés suivants. Si les hypothèses sont insuffisantes, l'énoncé est faux. Ne pas justifier les réponses.*

1. *Le dual de* $L^\infty(\mathbb{R}, \mathrm{Leb})$ *est* $L^1(\mathbb{R}, \mathrm{Leb})$, *(*Leb *désigne la mesure de Lebesgue).*
2. *Le dual de* $L^\infty(\mathbb{R}^d, \frac{1}{2}\delta_{-1} + \frac{1}{2}\delta_1)$ *est* $L^\infty(\mathbb{R}^d, \frac{1}{2}\delta_{-1} + \frac{1}{2}\delta_1)$.
3. *Si* $r > p$ *alors* $L^r([0,1], \mathrm{Leb}) \subset L^p([0,1], \mathrm{Leb})$.
4. *Si* $f \in L^1(\mathbb{R}^d, \mathrm{Leb})$ *et* $g \in L^\infty(\mathbb{R}^d, \mathrm{Leb})$ *alors* $f \star g \in C_b^0(\mathbb{R}^d)$ *(*C_b^0 *désigne l'ensemble des fonctions continues bornées).*
5. *Si* $f \in L^1(\mathbb{R}^d, \mathrm{Leb})$ *et* $g \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$ *alors* $f \star g \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$.

Exercice 2. *Trouver des contre-exemples aux deux assertions suivantes. Dans la suite* $(X, \mathscr{A}, \mu)$ *désigne un espace mesuré* σ*-fini. On ne cherchera pas à démontrer que le contre exemple répond à la question.*

1. *La convergence* μ*-presque partout entraîne la convergence dans* $L^p(X, \mu)$.
2. *La convergence dans* $L^p(X, \mu)$ *entraîne la convergence* μ*-presque partout.*

Exercice 3. *On considère une fonction* h *de class* C^1 *sur l'interval* $[0,1]$ *et de moyenne nulle* $\int_0^1 h(u)\,du = 0$. *On notera* h' *la dérivée. On cherche à montrer*

$$\int_0^1 h(u)^2\,du \leqslant \int_0^1 (h'(u))^2 u(1-u)\,du. \tag{1}$$

1. *Démontrer les deux inégalités*

$$\int\int h(u)^2\,du \leqslant \int_0^1\int_0^1 \big(h(u) - h(v)\big)^2\,du\,dv \leqslant 2 \iint\limits_{0<u<v<1} (v-u)\Big(\int_u^v h'(s)^2\,ds\Big)du\,dv.$$

2. *Démontrer pour tout* $0 < s < 1$ *fixé,*

$$\iint\limits_{0<u<s<v<1} (v-u)\,du\,dv \leqslant \frac{s(1-s)}{2}.$$

3. *Démontrer* (1).

Exercice 4. *Soit $(X, \mathscr{A}, \mu)$ un espace de probabilité et $f : X \to \mathbb{R}^+$ une densité, c'est-à-dire une fonction positive ou nulle intégrable vérifiant $\int f\, d\mu = 1$. On pose*

$$\forall\, u \in \mathbb{R},\ \ \Phi(u) = \exp(u) - 1, \quad \forall\, v > 0,\ \ \Psi(v) = v\ln(v) - v + 1.$$

1. *Montrer que $\forall\, v > 0,\ \ \Psi(v) \geqslant 0$.*
2. *Montrer que $\forall\, v > 0,\ \ \sup_{u\in\mathbb{R}} \big(uv - \Phi(u)\big) = \Psi(v)$.*
3. *Soit $g : X \to \mathbb{R}$ une fonction mesurable telle $\exp(g)$ est intégrable. Montrer alors*

$$\int fg\, d\mu \leqslant \int \big(f\ln f - f + 1\big)\, d\mu + \ln\Big(\int \exp(g)\, d\mu\Big).$$

   Indication : on commencera par le cas $\int \exp(g)\, d\mu = 1$ et on écrira une inégalité du type Young avec Φ et Ψ.

Exercice 5. *On considère une fonction positive ou nulle $f : \,]0, +\infty[\, \to [0, +\infty[$ localement intégrable, un scalaire $\lambda \in \,]-\infty, 1[$ et un réel $r \in]1, +\infty[$. On pose pout tout $t \in \,]0, +\infty[$*

$$P[f](t) = \frac{1}{t}\int_0^t f(s)\, ds.$$

On cherche à montrer

$$\int_0^\infty \big(t^\lambda P[f](t)\big)^r \frac{dt}{t} \leqslant \frac{1}{(1-\lambda)^r}\int_0^\infty \big(s^\lambda f(s)\big)^r \frac{ds}{s}. \tag{2}$$

On commence par supposer que f est positive, bornée, et à support compact dans $]0, +\infty[$.

1. *Montrer que le membre de droite dans (2) est fini.*
2. *En utilisant l'identité $f(s) = s^{-\lambda/r'} s^{\lambda/r'} f(s)$ où $\frac{1}{r} + \frac{1}{r'} = 1$, montrer*

$$P[f](t) \leqslant \frac{1}{(1-\lambda)^{1/r'}} t^{-\frac{\lambda}{r'} - \frac{1}{r}} \Big(\int_0^t s^{\lambda(r-1)} f(s)^r\, ds\Big)^{1/r}.$$

3. *En pensant à échanger l'ordre d'intégration, montrer*

$$\int_0^\infty t^{\lambda r - 1} P[f](t)^r\, dt \leqslant \frac{1}{(1-\lambda)^r}\int_0^\infty s^{\lambda r - 1} f(s)^r\, ds$$

   et que l'inégalité (2) est bien réalisée.
4. *Montrer que (2) est bien réalisée sans faire l'hypothèse que f est postive, bornée, et à support compact. Le membre de droite dans (2) peut éventuellement être infini.*