Année Universitaire 2024-2025

Parcours : Master 1 **Cours :** L^p, Fourier, Distribution **Code :** 4TMA711U
Épreuve : Devoir surveillé intermédiaire
Date : 18/12/2024 **Heure :** 14h30 **Durée :** 3 heures

Les notes de cours ne sont pas autorisées. La calculette Bordeaux est autorisée. Les exercices sont de difficulté croissante. Le barème est indicatif sur 30 points

On rappelle que la transformée de Fourier de $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ est donnée par la formule

$$\mathscr{F}[f](\xi) = \hat{f}(\xi) := \int_{\mathbb{R}^d} e^{-i2\pi\langle x,\xi\rangle} f(x)\,dx.$$

Exercice 1 (sur 4 points)**.** On définit pour tout $t > 0$ et $x \in \mathbb{R}^d$

$$p_t(x) = \frac{1}{(4\pi t)^{d/2}} \exp\Big(-\frac{\|x\|^2}{4t}\Big).$$

On rappelle que la transformée de Fourier de p_t est donnée par

$$\forall\, \xi \in \mathbb{R}^d,\ \hat{p}_t(\xi) = e^{-4t\pi^2\|\xi\|^2}.$$

1. Déterminer en se servant des rappels l'indentité

$$\int_{\mathbb{R}^d} p_t(x)\,dx = 1.$$

2. Montrer que pour tout $s, t > 0$

$$p_t \star p_s = p_{t+s}.$$

3. On note $p(t,x) = p_t(x)$. En utilisant exclusivement la transformée de Fourier et en justifiant tous les détails, montrer que

$$\forall\, t >,\ \forall\, x \in \mathbb{R}^d,\ \partial_t p = \Delta p,$$

où $\Delta = \partial_{x_1x_1} + \partial_{x_2x_2} + \cdots + \partial_{x_dx_d}$.

Exercice 2 (sur 5 points)**.** On se propose de déterminer la transformée de Fourier de la fonction

$$\forall\, x \in \mathbb{R}^d,\ f(x) = e^{-2\pi\|x\|}, \quad \|x\|^2 = \sum_{k=1}^{d} |x_k|^2.$$

1. Montrer que pour tout $\beta \in \mathbb{R}$

$$e^{-|\beta|} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} \exp\Big(-\Big(u^2 + \frac{\beta^2}{4u^2}\Big)\Big)du.$$

(Indication : Introduire la fonction $I(\beta) = \int_0^{+\infty} e^{-(u^2+\beta^2/4u^2)}\,du$ et montrer que $\frac{dI}{d\beta} = -I$.)

2. Montrer que $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ et en déduire

$$\forall\, x \in \mathbb{R}^d,\ f(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{v}} \exp\Big(-\Big(v + \frac{\pi^2 \|x\|^2}{v} \Big) \Big) dv,$$

3. Montrer que la transformée de Fourier de f est égale à

$$\hat{f}(\xi) = \frac{\Gamma((d+1)/2)}{\pi^{(d+1)/2}} \frac{1}{(1 + \|\xi\|^2)^{(d+1)/2}},$$

   où $\Gamma(s) = \int_0^{+\infty} e^{-x} x^{s-1}\, dx,\ \forall\, s > 0$.

4. On définit la fonction

$$\forall\, x \in \mathbb{R}^d,\ g(x) = \frac{1}{(1 + \|x\|^2)^{(d+1)/2}}.$$

   Montrer que $g \in L^1(\mathbb{R}^d)$ et calculer son intégrale.

Exercice 3 (sur 12 points)**.** Soit $\Omega := \{z = (x,y) \in \mathbb{R}^2 : \|z\| < 1\}$ où $\|z\|^2 = x^2 + y^2$. On désigne par $C_c^\infty(\Omega)$ l'ensemble des fonctions C^∞ de $\mathbb{R}^2$ à support compact dans Ω. On note par dz la mesure de Lebesgue dans $\mathbb{R}^2$. On note par ∂_1, ∂_2 les dérivées partielles par rapport à x et à y. On désigne par $H^1(\Omega)$ l'ensemble

$$H^1(\Omega) := \Big\{ (f, g_1, g_2) \in L^2(\Omega)^3 : \forall\, \varphi \in C_c^\infty(\Omega), \forall\, i \in [\![1,2]\!],\ \int f \partial_i \varphi\, dz = -\int g_i \varphi\, dz \Big\},$$

muni de la norme $\|(f, g_1, g_2)\|^2 = \|f\|_{L^2}^2 + \|g_1\|_{L^2}^2 + \|g_2\|_{L^2}^2$ où $\|\cdot\|_{L^2}$ désigne la norme dans $L^2(\Omega)$. On notera $\nabla\varphi = (\partial_1\varphi, \partial_2\varphi)$.

1. Montrer que $H^1(\Omega)$ est fermé dans $L^2(\Omega)^3$ et que $H^1(\Omega)$ est un graphe au dessus de la première composante : si $(f, g_1, g_2) \in H^1(\Omega)$ alors (g_1, g_2) est uniquement déterminé par f. On notera alors $\nabla f := (g_1, g_2)$ et $\|f\|_{H^1}^2 := \|f\|_{L^2}^2 + \|\nabla f\|_{L^2}^2$.
2. Montrer que $C^\infty(\Omega) \subset H^1(\Omega)$ dans le sens que :

$$\forall\, f \in C^\infty(\Omega),\ (f, \nabla f) \in H^1(\Omega).$$

3. Montrer que $C^\infty(\Omega)$ est dense dans $H^1(\Omega)$ pour la norme $\|\cdot\|_{H^1}$ dans le sens que

$$\forall\, (f, g_1, g_2) \in H^1(\Omega),\ \exists (f_n)_{n \geqslant 0} \in C^\infty(\Omega)\ \text{ t.q. }\ f_n \xrightarrow{L^2} f \text{ and } \nabla f_n \xrightarrow{L^2} (g_1, g_2).$$

   (Remarquer qu'on ne suppose pas f_n à support compact.)

Soit $\alpha \in \left]0, \frac{1}{2}\right[$. On considère la fonction $f : \Omega\backslash\{0\} \to \mathbb{R}$ définie par

$$\forall\, z = (x,y) \in \Omega\backslash\{0\},\ f(z) := \Big| \ln\Big(\Big\| \frac{z}{2} \Big\| \Big) \Big|^\alpha.$$

On rappelle qu'en coordonnées polaires $x = \rho\cos\theta$ et $y = \rho\sin\theta$, si $f : \mathbb{R}^2\backslash\{0\} \to \mathbb{R}$ est une fonction et si pour tout $\rho > 0$ et $\theta \in [0, 2\pi]$, $\tilde{f}(\rho,\theta) = f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)$, alors

$$\partial_1 f = \cos\theta \frac{\partial\tilde{f}}{\partial\rho} - \frac{\sin\theta}{\rho}\frac{\partial\tilde{f}}{\partial\theta}, \quad \partial_2 f = \sin\theta\frac{\partial\tilde{f}}{\partial\rho} + \frac{\cos\theta}{\rho}\frac{\partial\tilde{f}}{\partial\theta}.$$

4. Montrer que $f \in L^2(\Omega\backslash\{0\})$, que $\nabla\|z\| = z/\|z\|$ pour $z \neq 0$, et que $\nabla f \in L^2(\Omega\backslash\{0\})$. (Il est inutile de passer en polaire.)
5. Soit $\epsilon \in]0,1[$ et $\Omega_\epsilon = \{z \in \Omega : \|z\| > \epsilon\}$. On se propose de montrer la formule d'intégration par partie (dite de Green) : pour tout $f \in C^\infty(\Omega\backslash\{0\})$ et $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$

$$\int_{\Omega_\epsilon} (\partial_1 f)\varphi dz = -\epsilon \int_0^{2\pi} \cos(\theta)\tilde{f}\tilde{\varphi}\, d\theta - \int_{\Omega_\epsilon} f(\partial_1\varphi)\, dz, \tag{1}$$

$$\int_{\Omega_\epsilon} (\partial_2 f)\varphi dz = -\epsilon \int_0^{2\pi} \sin(\theta)\tilde{f}\tilde{\varphi}\, d\theta - \int_{\Omega_\epsilon} f(\partial_2\varphi)\, dz. \tag{2}$$

   (a) Démontrer

$$\forall\, \theta \in [0,2\pi],\ \int_\epsilon^1 \frac{\partial \tilde{f}}{\partial\rho}\tilde{\varphi}\, d\rho = -\epsilon(\tilde{f}\tilde{\varphi})(\epsilon,\theta) - \int_\epsilon^1 \tilde{f}\tilde{\varphi}\, d\rho - \int_\epsilon^1 \tilde{f}\frac{\partial\tilde{\varphi}}{\partial\rho}\, d\rho.$$

   (b) Démontrer

$$\forall\, \rho \in]\epsilon,1[\,,\ \int_0^{2\pi} \sin(\theta)\frac{\partial\tilde{f}}{\partial\theta}\tilde{\varphi}\, d\theta = -\int_0^{2\pi}\cos(\theta)\tilde{f}\tilde{\varphi}\, d\theta - \int_0^{2\pi}\sin(\theta)\tilde{f}\frac{\partial\tilde{\varphi}}{\partial\theta}\, d\theta.$$

   (c) Démontrer (1). On admettra l'identité (2).
6. Montrer que $(f, \nabla f) \in H^1(\Omega)$.

Exercice 4 (sur 9 points)**.** On note pour tout $t > 0$ et $x \in \mathbb{R}$ la fonction

$$p(t,x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}}\exp\big(-\frac{x^2}{4t}\big) = \frac{1}{\sqrt{t}}p_1\big(\frac{x}{\sqrt{t}}\big) \quad \text{avec} \quad p_1(x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi}}\exp\big(-\frac{x^2}{4}\big).$$

On note aussi p_t la fonction $p_t(x) = p(t,x)$. On désigne par $C^k(\mathbb{T})$ l'ensemble des fonctions 1-périodiques sur $\mathbb{R}$ de classe C^k. On se donne dans la suite une fonction $f \in C^0(\mathbb{T})$.

1. On appelle $q(t,x) = q_t(x) := \sum_{n\in\mathbb{Z}} p_t(x+n)$.
   (a) Montrer que $f \star p_t$ est 1-périodique.
   (b) Montrer que $\forall\, x \in \mathbb{R},\ f \star p_t(x) = \displaystyle\int_0^1 f(y) q_t(x-y)\, dy$.
2. Montrer que

$$\lim_{t\to 0} f \star p_t = f, \quad \text{uniformément sur } \mathbb{R}. \tag{3}$$

3. On cherche à montrer que

$$\lim_{t\to+\infty} f \star p_t = \int_0^1 f(y)\, dy, \quad \text{uniformément sur } \mathbb{R}. \tag{4}$$

   (a) Démontrer les deux inégalités suivantes

$$\forall\, x,y \in [0,1],\ \forall\, n \in \mathbb{Z},\ \begin{cases} |x+n| \leqslant 1 + |y+n|, \\ (x+n)^2 \geqslant \frac{1}{2}(y+n)^2 - 1. \end{cases}$$

(b) Montrer qu'il existe une constante $C > 0$ telle que

$$\forall\, t > 0,\ \sup_{x \in [0,1]} \left|\frac{dq_t}{dx}(x)\right| \leqslant \frac{C}{\sqrt{t}}.$$

(c) Montrer que la fonction g définie ci-dessous est 1-périodique

$$\forall\, x \in \mathbb{R},\ g(x) := \int_0^x \Big[f(y) - \int_0^1 f(y)\, dy\Big] dy.$$

(d) Montrer que

$$\forall\, x \in \mathbb{R},\ f \star p_t(x) - \int_0^1 f(y)\, dy = \int_0^1 g(x-y) \frac{dq_t}{dx}(y)\, dy$$

(e) Conclure.

Exercice 5. (Bonus sur 8 points) Soit $\alpha > 0$ un réel non entier. On cherche à construire une distribution correspondant à la partie finie de la fonction $x_+^{-\alpha} := x^{-\alpha}\mathbb{1}_{(x>0)}$ et qu'on notera $pf(x_+^{-\alpha})$.

1. Soit $k = \lfloor \alpha \rfloor$ la partie entière de α et $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe une fonction polynôme $P_{k,\varphi} : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ de degré au plus k et une fonction $R_{k,\varphi} : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ tels que

$$\forall\, \epsilon > 0,\ \int_\epsilon^{+\infty} x^{-\alpha}\varphi(x)\, dx = \epsilon^{-\alpha} P_{k,\varphi}(\epsilon) + R_{k,\varphi}(\epsilon), \quad \lim_{\epsilon\to 0} R_{k,\varphi}(\epsilon) = \text{existe}.$$

2. Montrer que, pour $k = \lfloor \alpha \rfloor$ et $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ donnés, la décomposition précédente en $P_{k,\varphi}$ et $R_{k,\varphi}$ est unique.
3. Montrer que la formule

$$\langle pf(x_+^{-\alpha}), \varphi\rangle := \lim_{\epsilon\to 0} R_{\lfloor\alpha\rfloor,\varphi}(\epsilon)$$

définit une distribution d'ordre exactement $\lfloor \alpha \rfloor$.

4. Déterminer les deux distributions suivantes

$$x6\, pf(x_+^{-\alpha}), \quad \frac{d}{dx}\Big(pf(x_+^{-\alpha})\Big).$$