

TD 1 – Révisions

Exercice 1. On considère $E = \mathcal{C}_c(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions continues à support compact sur $\mathbb{R}$. Pour $f \in E$, on définit

$$\|f\|_1 = \int_{\mathbb{R}} |f(t)| dt, \quad \|f\|_2 = \left(\int_{\mathbb{R}} |f(t)|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}}, \quad \|f\|_{\infty} = \sup_{\mathbb{R}} |f(t)|.$$

Montrer que ce sont bien des normes sur E . Montrer qu'elles ne sont pas comparables. Qu'en est-il lorsque l'on remplace $\mathbb{R}$ par $I = [0, 1]$?

Exercice 2. Soit $E = \mathcal{C}([0, 2], \mathbb{R})$ muni de la norme $\|\cdot\|_{\infty}$. On considère l'application linéaire $T : E \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$T(f) = \int_0^1 f(u) du - \int_1^2 f(u) du.$$

Montrer que $\|T\| = 2$ mais que cette norme n'est pas atteinte.

Exercice 3. Soit (X, d) un espace métrique complet et $(x_n)_{n \geq 0}$ une suite de X .

1. Montrer que si $\sum_{n \geq 0} d(x_n, x_{n+1}) < +\infty$, alors $(x_n)_n$ est de Cauchy.
2. La réciproque est-elle vraie?
3. Montrer que si $(x_n)_n$ est de Cauchy, on peut extraire une sous-suite $(x_{n_k})_{k \geq 0}$ telle que $\sum_{n \geq 0} d(x_{n_k}, x_{n_{k+1}}) < +\infty$.
4. En déduire qu'un espace vectoriel normé est complet si et seulement si toute série absolument convergente est convergente.

Exercice 4.

1. Montrer que $\mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$ muni de la norme $\|\cdot\|_{\infty}$ est complet.
2. Montrer que $\mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$ muni de la norme $\|\cdot\|_1$ n'est pas complet.

Exercice 5.

1. Montrer que $\mathcal{C}^1([0, 1], \mathbb{R})$ muni de la norme $\|\cdot\|_{\infty}$ n'est pas complet.

2. Montrer que $\mathcal{C}^1([0, 1], \mathbb{R})$ muni de la norme $N(f) = \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty$ est complet.

Exercice 6. On note ℓ_1 l'espace des suites réelles ou complexes $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telles que $\|u\|_1 := \sum_{n \in \mathbb{N}} |u_n| < \infty$. Montrer que $(\ell_1, \|\cdot\|_1)$ est un espace de Banach.

Exercice 7. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction. On dit que f est *convexe* si

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y), \quad \forall x, y \in I, \forall \lambda \in [0, 1].$$

Elle est *strictement convexe* si on peut mettre l'inégalité stricte pour $\lambda \in (0, 1)$ et $x \neq y$. Une fonction f est dite (*strictement*) *concave* si $-f$ est (strictement) convexe.

1. Une fonction $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ est convexe si et seulement si pour tout $n \geq 2$, pour tout choix de points $x_1, \dots, x_n \in I$ et de coefficients $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ tels que

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j = 1,$$

on a

$$f\left(\sum_{j=1}^n \lambda_j x_j\right) \leq \sum_{j=1}^n \lambda_j f(x_j).$$

2. Soit $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ convexe et $x < y < z$ trois points de I . Montrer qu'alors on a

$$\frac{f(y) - f(x)}{y - x} \leq \frac{f(z) - f(x)}{z - x} \leq \frac{f(z) - f(y)}{z - y}.$$

3. On suppose que I est ouvert. Soit $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction. Montrer que

(a) Si f est convexe, alors on a

- f est continue sur I .
- f admet des dérivées à gauche et à droite en tout point de I et

$$f'(x^-) \leq f'(x^+) \leq f'(y^-) \quad \forall x, y \in I, \text{ avec } x < y.$$

(b) Réciproquement, si f est dérivable dans I et que f' est croissante alors f est convexe.

Exercice 8. Soit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et $1 \leq p < \infty$. Montrer que pour tout $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}, (b_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ on a

1. Inégalité de Hölder

$$\left| \sum_{n \geq 0} a_n b_n \right| \leq \left(\sum_{n \in \mathbb{N}} |a_n|^p \right)^{1/p} \left(\sum_{n \in \mathbb{N}} |b_n|^q \right)^{1/q}$$

où $1/p + 1/q = 1$.

2. Inégalité de Minkowski

$$\left[\sum_{n \geq 0} |a_n + b_n|^p \right]^{1/p} \leq \left(\sum_{n \in \mathbb{N}} |a_n|^p \right)^{1/p} + \left(\sum_{n \in \mathbb{N}} |b_n|^p \right)^{1/p}.$$

Exercice 9. Soit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et $1 \leq p < \infty$. On note ℓ_p l'espace des suites $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{K}$ telles que $\|u\|_p := (\sum_{n \in \mathbb{N}} |u_n|^p)^{1/p} < \infty$. Montrer que $(\ell_p, \|\cdot\|_p)$ est un espace de Banach séparable.

Exercice 10. Soit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. On note ℓ_∞ l'espace des suites $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{K}$ telles que $\|u\|_\infty := \sup_{n \in \mathbb{N}} |u_n| < \infty$. Montrer que $(\ell_\infty, \|\cdot\|_\infty)$ est un espace de Banach non séparable.

Exercice 11. On note h_1 l'ensemble des suites $u \in \ell_2$ telles que $\sum_{n \in \mathbb{N}} (n+1)^2 |u_n|^2 < \infty$. Montrer que

$$\langle u, v \rangle_{h_1} = \sum_{n \in \mathbb{N}} (n+1)^2 u_n \overline{v_n}$$

définit un produit scalaire sur pour lequel h_1 est un espace de Hilbert.

Exercice 12. Soit E un espace de Banach et u un endomorphisme continu de E .

1. On suppose que $\|u\|_{E \rightarrow E} < 1$. Montrer que $Id - u$ est inversible.
2. En déduire que $GL(E)$ est ouvert.

Exercice 13. (Théorème de représentation de Riesz) Soit H un espace de Hilbert. Montrer que pour toute forme linéaire continue ℓ sur H , il existe un vecteur y (unique) tel que $\ell(\cdot) = \langle \cdot, y \rangle$.

Exercice 14.

1. Proposer une suite de fonctions continues $(f_n)_n$ sur $[0, 1]$ qui converge simplement vers une fonction continue f sur $[0, 1]$ mais telle que

$$\int_0^1 f_n(t) dt \text{ ne converge pas vers } \int_0^1 f(t) dt.$$

2. Qu'en est-il si on suppose que $(f_n)_n$ converge uniformément vers 0?

Exercice 15. Soit $I_n = \int_0^\infty e^{-t^n} dt$. Justifier que cette intégrale est bien définie et que la suite (I_n) admet une limite que l'on calculera lorsque $n \rightarrow \infty$

Exercice 16. Montrer que $\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \sqrt{2\pi}$.

Exercice 17. (Transformée de Fourier de la Gaussienne). On définit pour $\xi \in \mathbb{R}$,

$$\phi(\xi) = \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{x^2}{2}} e^{-ix\xi} dx.$$

1. Montrer que ϕ est bien définie et que ϕ est continue sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que ϕ est dérivable, puis par intégration par parties, montrer ϕ vérifie une équation différentielle du premier ordre.
3. Résoudre cette équation différentielle puis donner la valeur de $\phi(\xi)$.

Exercice 18. (Coordonnées polaires dans $\mathbb{R}^3$)

Soient $U = \{(r, \varphi, \theta), 0 < r < \infty, -\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2}, 0 < \theta < 2\pi\}$ et $V = \mathbb{R}^3 \setminus \{(x, 0, z), x \geq 0, z \in \mathbb{R}\}$ et soit $\phi : U \rightarrow V$ définie par

$$\Phi(r, \varphi, \theta) = (r \cos \theta \cos \varphi, r \sin \theta \cos \varphi, r \sin \varphi)$$

1. Montrer que Φ est un C^1 difféomorphisme et que $J\Phi(r, \varphi, \theta) = -r^2 \cos \varphi$.
2. Pour $\alpha \in \mathbb{R}$ on définit

$$f_\alpha(x, y, z) = (x^2 + y^2 + z^2)^{\alpha/2}$$

sur $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$. Montrer que f_α est intégrable sur $B(0, 1)$ ssi $\alpha > -3$ et que f_α est intégrable sur $\mathbb{R}^3 \setminus B(0, 1)$ ssi $\alpha < -3$.

3. Généralisation à $\mathbb{R}^d$, $d \geq 3$?