LICENCE DE MATHÉMATIQUES

CALCUL INTÉGRAL

Date: 9 septembre 2025 *File :* cours-calcul-integral-25-26.tex.

Table des matières

1. Mesure et intégrale 5
1.1. Mesure 5
1.2. Intégrale des fonctions positives 11
1.3. Fonctions intégrables 18
1.4. Continuité et dérivation sous le signe somme 24
2. Mesure de Lebesgue 27
2.1. Un résultat d'unicité 27
2.2. Un théorème de prolongement 29
2.3. Mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$ 35
2.4. Intégrales au sens de Riemann et de Lebesgue 41
3. Intégration sur un espace produit 44
3.1. Produit de deux espaces mesurés 44
3.2. Intégration sur un espace produit 46
3.3. Intégration sur $\mathbb{R}^n$ 51
3.4. Convolution 59
4. Espaces L^p 65
4.1. Inégalités de Hölder et de Minkowski, espaces $\mathscr{L}^p$ 65
4.2. Espaces L^p, théorème de Riesz-Fischer 68
4.3. L'espace L^2 et les espaces de Hilbert 74
4.4. Convolution et espaces L^p 86
Références 93

1. Mesure et intégrale

Une mesure est une fonction qui à certains sous-ensembles d'un ensemble E associe un nombre positif. On demande à cette fonction de vérifier certaines propriétés qui font qu'elle ne peut pas être définie sur tous les sous-ensembles de E. Notre objet d'étude principal sera la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}^n$, et l'intégrale associée.

1.1. **Mesure.**

Définition 1.1. *Soit X un ensemble. Une famille $\mathscr{A}$ de parties de X est une algèbre de Boole si*
(i) $\emptyset$ et X appartiennent à $\mathscr{A}$,
(ii) si $A \in \mathscr{A}$ alors $A^c \in \mathscr{A}$,
(iii) si A et B appartiennent à $\mathscr{A}$ alors $A \cup B \in \mathscr{A}$.

Remarque 1.1.
· si A et $B \in \mathscr{A}$ alors $A \cap B = (A^c \cup B^c)^c \in \mathscr{A}$;
· toutes les opérations finies d'union, intersection, passage au complémentaire, conservent $\mathscr{A}$.

Exemple 1.1.
$\mathscr{P}(X)$, $\{\emptyset, X\}$, parties finies ou de complémentaire fini, unions finies d'intervalles de $\mathbb{R}$.

Définition 1.2. *Un ensemble $\mathscr{M}$ de parties de X est appelé tribu (ou σ-algèbre de Boole) si*
(i) $\emptyset$ et X appartiennent à$\mathscr{M}$,
(ii) si $A \in \mathscr{M}$ alors $A^c \in \mathscr{M}$,
(iii.d) si $(A_n)_{n\geq 1}$ est une suite d'éléments de $\mathscr{M}$, alors

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathscr{M}.$$

Le couple $(X, \mathscr{M})$ est alors appelé espace mesurable et les éléments de $\mathscr{M}$ des ensembles mesurables.

On vérifie facilement qu'une tribu est une algèbre de Boole.

Remarque 1.2.
· $A, B \in \mathscr{M}$ implique $A \backslash B = A \cap B^c \in \mathscr{M}$,
· A_n, $n \geq 1 \in \mathscr{M}$ implique $\cap_{n\geq 1} A_n = (\cup_{n\geq 1} A_n^c)^c \in \mathscr{M}$.

Exemple 1.2.
· $\{\emptyset, X\}$;
· $\mathscr{P}(X)$;
· parties au plus dénombrables ou de complémentaire au plus dénombrable.

On dit qu'une tribu $\mathscr{M}$ est plus petite qu'une tribu $\mathscr{M}'$ si $\mathscr{M} \subset \mathscr{M}'$. La tribu $\{\emptyset, X\}$ est la plus petite des tribus sur X, et $\mathscr{P}(X)$ est la plus grande. Une intersection quelconque de tribus est une tribu. Il existe donc pour tout ensemble $\mathscr{D}$ de parties de X une plus petite tribu qui contienne $\mathscr{D}$:

$$\sigma(\mathscr{D}) = \bigcap_{\mathscr{M} \text{ tribu}, \mathscr{D} \subset \mathscr{M}} \mathscr{M}.$$

On note que cette intersection a un sens car il existe au moins une tribu qui contient $\mathscr{D}$, c'est $\mathscr{P}(X)$.

Exercice 1.1. Montrer que si $\mathscr{D}$ a n éléments, alors $\sigma(\mathscr{D})$ a au plus 2^{2^n} éléments. On pourra montrer que $\sigma(\mathscr{D})$ est l'ensemble de toutes les réunions possibles de toutes les intersections possibles d'éléments de $\mathscr{D}$ ou leurs complémentaires.

Solution : notons $\mathscr{D} = \{A_1, \ldots, A_n\}$. On fabrique une partition de X en prenant tous les $A_1^{\varepsilon_1} \cap \ldots \cap A_n^{\varepsilon_n}$ avec $\forall i \in \{1, \ldots, n\}$, $\varepsilon_i \in \{0, 1\}$ et $A_i^1 := A_i$, $A_i^0 := A_i^c$, et en enlevant ceux qui sont possiblement vides. On note $D_1, \ldots, D_k$ cette partition. Comme il y a 2^n possibilités pour les $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$, on a $k \leq 2^n$. Bien sûr, tous les D_j sont dans $\sigma(\mathscr{D})$ puisque $\sigma(\mathscr{D})$ est une tribu qui contient les A_i. Ensuite, on prend toutes les réunions possibles des D_j. Il y en a 2^k et bien sûr elles sont aussi dans $\sigma(\mathscr{D})$ puisque $\sigma(\mathscr{D})$ est une tribu qui contient les D_j. On vérifie finalement que l'ensemble de toutes les réunions possibles des D_j forme une tribu. Et c'est forcément $\sigma(\mathscr{D})$ puisque toutes ces réunions possibles appartiennent à toutes les tribus qui contiennent $\mathscr{D}$. On a $2^k \leq 2^{2^n}$ ce qui répond à la question.

Exercice 1.2. Montrer que toute tribu $\mathscr{M}$ sur un ensemble au plus dénombrable est engendrée par une partition.

Indication : regarder les classes d'équivalence de la relation

$$x \,\mathscr{R}\, y \;\Leftrightarrow\; (\forall\, A \in \mathscr{M},\; x \in A \Leftrightarrow y \in A)\,.$$

Solution : soit $x \in X$. Si y n'est pas dans la classe de x alors il existe $A(x, y) \in \mathscr{M}$ tel que $x \in A(x, y)$ et $y \notin A(x, y)$. On vérifie facilement avec une double inclusion que la classe de x est

$$[x] = \cap_{y \notin [x]} A(x, y).$$

C'est une intersection au plus dénombrable, donc $[x] \in \mathscr{M}$. De plus il est clair (faire une double inclusion) que tout $A \in \mathscr{M}$ s'écrit

$$A = \cup_{x \in A} [x].$$

Ceci répond à la question (même si ce n'est pas très propre d'avoir une union avec plusieurs fois le même ensemble).

Exercice 1.3. Existe-t-il des tribus de cardinal dénombrable ?

Solution : si $\mathscr{M}$ *est dénombrable alors les classes* $[x]$ *définies à l'exercice précédent sont des éléments de* $\mathscr{M}$ *puisque les* $A(x,y)$ *sont en quantité au plus dénombrable. Il y a une quantité dénombrable de classes car si elles étaient en nombre fini,* $\mathscr{M}$ *serait finie (exercice d'avant). Toutes les réunions possibles des classes sont donc dans* $\mathscr{M}$*, et forment* $\mathscr{M}$ *grâce à l'égalité*

$$A = \cup_{x\in A}[x],$$

(puisque les $[x]$ *sont en quantité dénombrable on peut rendre cette réunion au plus dénombrable). Mais l'ensemble de toutes les réunions possibles des classes n'est pas dénombrable car il est en bijection avec l'ensemble des parties de* $\mathbb{N}$*. On arrive donc à une contradiction. En conclusion, il n'y a pas de tribus de cardinal dénombrable.*

Si X est un espace topologique, on notera $\mathscr{B}(X)$ la *tribu borélienne* de X, c'est à dire la tribu engendrée par les ouverts de X. Ses éléments sont les *ensembles boréliens.* Tout ouvert, tout fermé est un borélien.

Si $X = \mathbb{R}$, la tribu borélienne est engendrée par les intervalles ouverts, et même les intervalles ouverts à extrémités rationnelles (ou dyadiques, ...) : tout ouvert est réunion au plus dénombrable d'intervalles à extrémités rationnelles (voir cours de topologie).

Si $X = \mathbb{R}^2$, la tribu borélienne est engendrée par les pavés ouverts (et même les pavés ouverts à extrémités rationnelles, ...) $]a,b[\times]c,d[$.

Si $X = \mathbb{R}^n$, ...

Définition 1.3. *Soient* $(X,\mathscr{M})$ *et* $(E,\mathscr{E})$ *deux espaces mesurables. Une fonction* $f\colon X\to E$ *est dite mesurable si* $f^{-1}(\mathscr{E})\subset\mathscr{M}$*.*

On rappelle les notations

$$f^{-1}(\mathscr{E}) = \{f^{-1}(A),\ A\in\mathscr{E}\} \quad \text{avec} \quad f^{-1}(A) = \{x\in X,\ f(x)\in A\}.$$

Exercice 1.4.

1) Montrer que f^{-1} commute avec $\cap$dén, $\cup$dén, passage au compl.
2) Montrer que $f^{-1}(\mathscr{E})$ est toujours une tribu sur X.
3) Montrer que si $\mathscr{D}\subset\mathscr{P}(E)$, $f^{-1}(\sigma(\mathscr{D})) = \sigma\left(f^{-1}(\mathscr{D})\right)$.

Conséquence : si $(E,\mathscr{E}) = (\bar{\mathbb{R}},\mathscr{B}(\bar{\mathbb{R}}))$, alors f est mesurable si et seulement si l'image réciproque par f de tout intervalle de $\bar{\mathbb{R}}$ est dans $\mathscr{M}$, si et seulement si l'image réciproque par f de tout ensemble $[\alpha,\infty]$ est dans $\mathscr{M}$. La première équivalence est claire. La seconde s'obtient en écrivant tout intervalle de $\bar{\mathbb{R}}$ à l'aide des $[\alpha, \infty]$: par exemple

$$\begin{aligned}]\alpha, \infty] &= \bigcap_{n=1}^{\infty} [\alpha - 1/n, \infty], \\ [-\infty, \alpha[&= [\alpha, \infty]^c, \\ [-\infty, \alpha] &=]\alpha, \infty]^c, \end{aligned}$$

puis on fait des intersections, et on utilise bien-sûr l'exercice 1.4.

Si f et g sont deux fonctions mesurables sur X à valeurs réelles et $\Phi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ est mesurable par rapport aux tribus boréliennes, alors $\Phi(f, g)\colon X \to \mathbb{R}$ est mesurable. En effet, si I est un intervalle de $\mathbb{R}$

$$\Phi(f, g)^{-1}(I) = (f, g)^{-1}\left(\Phi^{-1}(I)\right) \tag{1.1}$$

et comme $\Phi^{-1}(I)$ est un borélien de $\mathbb{R}^2$, il suffit de montrer que $(f, g)\colon X \to \mathbb{R}^2$ est mesurable. Or si I et J sont des intervalles de $\mathbb{R}$,

$$(f, g)^{-1}(I \times J) = f^{-1}(I) \cap g^{-1}(J).$$

On conclut encore avec l'exercice 1.4, et avec le fait que la tribu borélienne de $\mathbb{R}^2$ est engendrée par les pavés.

Conséquence : toutes les opérations mesurables sur les fonctions mesurables donnent des fonctions mesurables. La somme, le produit, le sup, l'inf de deux fonctions mesurables est mesurable.

Soit $f_n, n \geq 1$ une suite de fonctions mesurables à valeurs dans $\bar{\mathbb{R}}$. alors la fonction $g = \sup_{n \geq 1} f_n$ est mesurable. En effet,

$$g^{-1}(]\alpha, \infty]) = \bigcup_{n=1}^{\infty} f_n^{-1}(]\alpha, \infty]).$$

De même, la fonction

$$h = \limsup_{n \to \infty} f_n = \inf_{m \geq 0} \left(\sup_{n \geq m} f_n \right)$$

est mesurable.

Si pour tout x, la suite $f_n(x)$ converge vers $f(x)$, alors f est mesurable.

Une fonction f à valeurs complexes est mesurable pour les tribus boréliennes si et seulement si sa partie réelle et sa partie imaginaire sont mesurables (cela résulte de (1.1), et de l'engendrement de la tribu borélienne de $\mathbb{R}^2$ par les pavés, et de l'exercice 1.4).

Définition 1.4. *Si X est un espace topologique et $\mathscr{M} = \mathscr{B}$ est la tribu borélienne de X, alors une fonction mesurable est appelée une fonction borélienne.*

Les fonctions continues sont boréliennes. En effet, l'image réciproque d'un intervalle ouvert par une fonction continue est un un ouvert, par définition de la continuité. Et encore une fois, on utilise l'exercice 1.4.

Définition 1.5. *Une fonction est étagée si elle ne prend qu'un nombre fini de valeurs. Une fonction mesurable étagée f sur un espace mesurable $(X, \mathscr{M})$ est donc une combinaison linéaire de fonctions caractéristiques d'ensembles mesurables*

$$f = \sum_{i=1}^{N} a_i \mathbb{1}_{A_i} \qquad (A_i \in \mathscr{M}).$$

Exercice 1.5. Montrer que si on prend les A_i de la forme $f^{-1}(\{a_i\})$ où les a_i sont toutes les valeurs prises par f, alors on obtient une écriture canonique unique de f, où les A_i sont disjoints et forment une partition de X.

Proposition 1.6. *Soit $(X, \mathscr{M})$ un espace mesurable et soit f une fonction mesurable à valeurs dans $[0, \infty]$. Il existe une suite croissante (u_n) de fonctions mesurable étagées à valeurs dans $[0, \infty[$, telle que pour tout $x \in X$,*

$$\lim_{n\to\infty} u_n(x) = f(x).$$

Démonstration. Pour $n > 0$ et $1 \leq i \leq n2^n$, posons

$$A_{n,i} = \left\{x,\ \frac{i-1}{2^n} \leq f(x) < \frac{i}{2^n}\right\},$$

$$B_n = \{x,\ f(x) \geq n\}.$$

Ces ensembles sont mesurables. On définit

$$u_n = \sum_{i=1}^{n2^n} \frac{i-1}{2^n} \mathbb{1}_{A_{n,i}} + n\mathbb{1}_{B_n}.$$

Montrons que $u_n \leq u_{n+1}$. Pour cela, on écrit

$$A_{n,i} = A_{n+1,2i-1} \cup A_{n+1,2i}.$$

Si $x \in A_{n+1,2i-1}$, alors

$$u_{n+1}(x) = \frac{2i-2}{2^{n+1}} = \frac{i-1}{2^n} = u_n(x)$$

, et si $x \in A_{n+1,2i}$,

$$u_{n+1}(x) = \frac{2i-1}{2^{n+1}} > \frac{i-1}{2^n} = u_n(x).$$

Ensuite, on remarque que B_n est la réunion de B_{n+1} et des $A_{n+1,i}$, i variant de $n2^{n+1}+1$ à $(n+1)2^{n+1}$. Si $x \in B_{n+1}$,

$$u_{n+1}(x) = n+1 > n = u_n(x),$$

et si x appartient à l'un des $A_{n+1,i}$,

$$u_{n+1}(x) = \frac{i-1}{2^{n+1}} \geq \frac{n2^{n+1}}{2^{n+1}} = u_n(x).$$

Montrons ensuite que pour tout x, $u_n(x)$ converge vers $f(x)$. Si $f(x) = \infty$ alors $u_n(x) = n$, c'est clair. Si $f(x) < \infty$, on prend $n > f(x)$ et on a

$$u_n(x) \leq f(x) < u_n(x) + \frac{1}{2^n}.$$

□

Remarquons que si f est bornée, la convergence est uniforme.

Définition 1.7. *Une mesure sur un espace mesurable* $(X, \mathscr{M})$ *est une application* $\mu\colon \mathscr{M} \to [0, \infty]$ *vérifiant*

(a) $\mu(\emptyset) = 0$,

(b) si (A_n) *est une suite d'ensembles mesurables deux à deux disjoints,*

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n).$$

Le nombre $\mu(A)$ *est appelé la mesure de l'ensemble mesurable* A*, la mesure* $\mu(X)$ *est appelée masse totale de la mesure* μ*, et si* $\mu(X) = 1$*,* μ *est une mesure de probabilité. Un espace mesuré est un triplet* $(X, \mathscr{M}, \mu)$*, où* μ *est une mesure définie sur l'espace mesurable* $(X, \mathscr{M})$*.*

On peut remarquer que (a) et (b) impliquent :

(c) si A_1 et A_2 sont deux ensembles mesurables disjoints,

$$\mu(A_1 \cup A_2) = \mu(A_1) + \mu(A_2).$$

En effet, il suffit de prendre $A_n = \emptyset$ pour $n \geq 3$.

Exemple 1.3.

La *mesure de Dirac* δ_x sur $(X, \mathscr{P}(X))$ est définie par

$$\delta_x(E) = 1 \quad \text{si} \quad x \in E, \quad \delta_x(E) = 0 \quad \text{sinon.}$$

Exemple 1.4.

La mesure de comptage μ sur $(X, \mathscr{P}(X))$ associe à E le nombre d'éléments de E.

Exercice 1.6.

Toujours avec $(X, \mathscr{P}(X))$, on considère une suite (x_n) de points de X et une suite (α_n) de nombres ≥ 0. Posons

$$\mu(E) = \sum_{n,\ x_n \in E} \alpha_n.$$

Montrer que μ est une mesure sur $(X, \mathscr{P}(X))$. Une telle mesure est apelée une mesure discrète. On peut remarquer que $\mu = \sum_n \alpha_n \delta_{x_n}$.

Remarque 1.3. Si μ est une mesure sur $(X, \mathscr{M})$ et $\mathscr{M}'$ est une sous-tribu de $\mathscr{M}$, alors μ induit canoniquement une mesure sur $(X, \mathscr{M}')$. La réciproque est bien évidemment fausse.

Si X est un espace topologique et $\mathscr{B}$ est la tribu borélienne de X, une mesure sur l'espace $(X, \mathscr{B})$ est appelée *mesure borélienne*.

Nous montrerons au chapitre 2 que sur l'espace mesurable

$$(\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R})),$$

il existe une unique mesure λ, telle que

$$\lambda([a, b]) = b - a.$$

Définition 1.8. *Cette mesure est appelée la mesure de Lebesgue sur* $\mathbb{R}$.

1.2. **Intégrale des fonctions positives.**

Conventions

$$a + \infty = \infty + a = \infty \quad \text{si} \quad a \in [0, \infty],$$

$$a\infty = \infty a = \infty \quad \text{si} \quad a \in]0, \infty],$$

$$0\infty = \infty 0 = 0.$$

Fixons pour cette partie un espace mesuré $(X, \mathscr{M}, \mu)$. Nous allons d'abord définir l'intégrale d'une fonction mesurable étagée, puis cette définition sera étendue aux fonctions positives par passage à la borne supérieure.

Définition 1.9. *Soit f une fonction mesurable étagée à valeurs dans* $[0, \infty]$. *On désigne par $\alpha_1, \ldots, \alpha_N$ les valeurs prises par f et on note*

$$E_j = f^{-1}(\{\alpha_j\}).$$

L'intégrale de f est définie par

$$\int_X f\, d\mu = \sum_{j=1}^{N} \alpha_j \mu(E_j).$$

On aimerait bien pouvoir se passer de la forme canonique d'une fonction étagée pour calculer son intégrale, et avoir aussi une propriété de linéarité.

Proposition 1.10. *Si*

$$f = \sum_{i=1}^{n} a_i \mathbb{1}_{A_i}$$

où les a_i sont dans $[0, \infty]$ et les A_i sont mesurables, alors

$$\int_X f \, d\mu = \sum_{i=1}^{n} a_i \mu(A_i).$$

Démonstration. Il existe des ensembles mesurables disjoints C_k, $1 \leq k \leq p$, tels que tout ensemble A_i soit réunion de certains C_k prendre $p = 2^n$ (ou $p \leq 2^n$ si des intersections sont vides) et toutes les intersections possibles non vides des A_i et A_i^c :

$$1_{A_i} = \sum_{k=1}^{p} \varepsilon_{ik} \mathbb{1}_{C_k},$$

où $\varepsilon_{ik} = 1$ si $C_k \subset A_i$ et $\varepsilon_{ik} = 0$ sinon. On a donc

$$\mu(A_i) = \sum_{k=1}^{p} \varepsilon_{ik} \mu(C_k).$$

La fonction f s'écrit

$$f = \sum_{i=1}^{n} a_i \left(\sum_{k=1}^{p} \varepsilon_{ik} \mathbb{1}_{C_k} \right) = \sum_{k=1}^{p} \left(\sum_{i=1}^{n} a_i \varepsilon_{ik} \right) \mathbb{1}_{C_k}.$$

Si x appartient à C_k, alors

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i \varepsilon_{ik}.$$

L'ensemble E_j est donc égal à la réunion des C_k pour lesquels

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \varepsilon_{ik} = \alpha_j.$$

On pose pour $j \in \{1, \ldots, N\}$,

$$I_j = \left\{ k \in \{1, \ldots, p\}, \ \sum_{i=1}^{n} a_i \varepsilon_{ik} = \alpha_j. \right\}.$$

Les ensembles I_j forment une partition de $\{1, \dots, p\}$. Par suite, l'intégrale de f s'écrit

$$\begin{aligned}
\int_X f\,d\mu &= \sum_{j=1}^{N} \alpha_j \mu(E_j) \\
&= \sum_{j=1}^{N} \alpha_j \left(\sum_{k \in I_j} \mu(C_k) \right) \\
&= \sum_{j=1}^{N} \left(\sum_{k \in I_j} \left(\sum_{i=1}^{n} a_i \varepsilon_{ik} \right) \mu(C_k) \right) \\
&= \sum_{k=1}^{p} \left(\sum_{i=1}^{n} a_i \varepsilon_{ik} \right) \mu(C_k) \\
&= \sum_{i=1}^{n} a_i \left(\sum_{k=1}^{p} \varepsilon_{ik} \mu(C_k) \right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} a_i \mu(A_i).
\end{aligned}$$

□

On considère maintenant une fonction f mesurable à valeurs dans $[0, \infty]$.

Définition 1.11. *L'intégrale de f est définie par*

$$\int_X f\,d\mu = \sup \left\{ \int_X u\,d\mu,\ u \in \mathscr{E}(X\,\mathscr{M}),\ 0 \le u \le f \right\},$$

où $\mathscr{E}(X\,\mathscr{M})$ désigne l'ensemble des fonctions mesurables étagées définies sur X. C'est un nombre positif, éventuellement infini.

On vérifie les propriétés suivantes de l'intégrale.

a) Si f et g sont deux fonctions mesurables à valeurs dans $[0, \infty]$ et si $f \le g$, alors

$$\int_X f\,d\mu \le \int_X g\,d\mu.$$

En effet, toutes les fonctions u qui minorent f minorent aussi g.

b) Si λ est un nombre réel positif, alors

$$\int_X \lambda f\,d\mu = \lambda \int_X f\,d\mu.$$

Ici on établit avec la multiplication par $\lambda > 0$ une correspondance bijective entre les fonctions qui minorent f et celles qui minorent λf.

c) Si E est un ensemble mesurable, on note

$$\int_E f\,d\mu = \int_X f\,\mathbb{1}_E\,d\mu.$$

Si $\mu(E) = 0$, alors $\int_E f\,d\mu = 0$. En effet, toute fonction étagée u qui s'annule sur E^c vérifie alors $\int_E u\,d\mu = 0$.

Remarquons que l'additivité de l'intégrale n'est pas évidente. On commence par établir le résultat suivant.

Théorème 1.12. *(théorème de convergence monotone, ou de Beppo-Levi).*

Soit (f_n) *une suite croissante de fonctions mesurables à valeurs dans* $[0, \infty]$. *Posons*

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x).$$

Alors la fonction f *est mesurable et*

$$\int_X f\,d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_X f_n\,d\mu.$$

On commence par établir le lemme suivant.

Lemme 1.13. *Soit* u *une fonction étagée à valeurs dans* $[0, \infty]$. *Pour un ensemble mesurable* E *on pose*

$$\nu(E) = \int_E u\,d\mu.$$

Alors ν *est une mesure sur l'espace mesurable* $(X, \mathscr{M})$.

Démonstration. On écrit

$$u = \sum_{i=1}^{n} a_i\,\mathbb{1}_{A_i},$$

avec $a_i \geq 0$, $A_i \in \mathscr{M}$. Soit $(E_k)_{k\geq 1}$ une suite d'ensembles mesurables deux à deux disjoints et soit E leur réunion. Alors

$$\begin{aligned}
\nu(E) &= \sum_{i=1}^{n} a_i \mu(A_i \cap E) \\
&= \sum_{i=1}^{n} a_i \left(\sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_i \cap E_k) \right) \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{i=1}^{n} a_i \mu(A_i \cap E_k) \right) \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \nu(E_k).
\end{aligned}$$

□

Démonstration. du théorème 1.12

La fonction f est mesurable car elle est la limite simple des fonctions f_n. La suite des intégrales $\int_X f_n \, d\mu$ étant croissante, elle a une limite a. Puisque $f_n \leq f$, on a

$$\int_X f_n \, d\mu \leq \int_X f \, d\mu$$

donc

$$a \leq \int_X f \, d\mu.$$

Soit u une fonction mesurable étagée telle que $0 \leq u \leq f$. Montrons que

$$\int_X u \, d\mu \leq a,$$

ce qui donnera en prenant le sup sur toutes les fonctions $u \leq f$ étagées :

$$\int_X f \, d\mu \leq a,$$

et le théorème sera démontré.

Soit $c \in]0, 1[$. Posons

$$E_n = \{x \in X, \; f_n(x) \geq cu(x)\}.$$

Les ensembles E_n sont mesurables, $E_n \subset E_{n+1}$, et

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n = X.$$

D'autre part,

$$\int_X f_n\,d\mu \geq \int_{E_n} f_n\,d\mu \geq c\int_{E_n} u\,d\mu. \tag{1.2}$$

d'après le lemme et la propriété $\lim_{n\to\infty} \nu(E_n) = \nu(X)$ (voir TD),

$$\lim_{n\to\infty}\int_{E_n} u\,d\mu = \int_X u\,d\mu,$$

donc en passant à la limite dans (1.2) :

$$a = \lim_{n\to\infty}\int_X f_n\,d\mu \geq c\int_X u\,d\mu,$$

ce qui implique

$$a \geq c\int_X u\,d\mu.$$

Cette inégalité étant vraie pour tout $c < 1$, on a

$$a \geq \int_X u\,d\mu$$

ce qui implique

$$a \geq \int_X f\,d\mu.$$

□

Corollaire 1.14. *(lemme de Fatou) Soit* (f_n) *une suite de fonctions mesurables à valeurs dans* $[0,\infty]$. *Alors*

$$\int_X \liminf_{n\to\infty} f_n\,d\mu \leq \liminf_{n\to\infty}\int_X f_n\,d\mu$$

Démonstration. La suite des fonctions

$$g_k = \inf_{n\geq k} f_n$$

est croissante de limite $\liminf_{n\to\infty} f_n$. La suite des nombres

$$a_k = \inf_{n\geq k}\int_X f_n d\mu$$

est croissante de limite $\liminf\limits_{n\to\infty}\int_X f_n d\mu$. Pour $n \geq k$, $g_k \leq f_n$, donc

$$\int_X g_k d\mu \leq \int_X f_n d\mu$$

ce qui donne

$$\int_X g_k d\mu \leq a_k = \inf_{n\geq k}\int_X f_n d\mu,$$

et d'après le théorème de convergence monotone 1.12,

$$\lim_{k\to\infty}\int_X g_k\,d\mu = \int_X \liminf_{n\to\infty} f_n\,d\mu.$$

Finalement,

$$\int_X \liminf_{n\to\infty} f_n\,d\mu \le \lim_{k\to\infty} a_k = \liminf_{n\to\infty}\int_X f_n\,d\mu,$$

ce qui prouve le lemme. □

L'inégalité peut être stricte, comme le prouve l'exemple $X =]0,\infty[$, $f_n(x) = ne^{-nx}$, qui donne

$$\int_0^\infty f_n(x)\,dx = 1$$

alors que $f_n(x)$ converge vers 0 pour tout x.

On peut maintenant établir l'additivité de l'intégrale.

Proposition 1.15. *Soient f et g deux fonctions mesurables à valeurs dans $[0,\infty]$. Alors*

$$\int_X (f+g)\,d\mu = \int_X f\,d\mu + \int_X g\,d\mu.$$

Démonstration. Si f et g sont étagées,

$$f = \sum_{i=1}^n a_i \mathbb{1}_{A_i}, \qquad g = \sum_{j=1}^p b_j \mathbb{1}_{B_j},$$

alors on a déjà établi que

$$\begin{aligned}\int_X (f+g)\,d\mu &= \sum_{i=1}^n a_i\mu(A_i) + \sum_{j=1}^p b_j\mu(B_j)\\ &= \int_X f\,d\mu + \int_X g\,d\mu.\end{aligned}$$

Si f et g sont mesurables, il existe des suites croissantes de fonctions mesurables étagées u_n et v_n telles que

$$\lim_{n\to\infty} u_n(x) = f(x), \qquad \lim_{n\to\infty} v_n(x) = g(x).$$

Pour tout n,

$$\int_X (u_n+v_n)\,d\mu = \int_X u_n\,d\mu + \int_X v_n\,d\mu,$$

et par convergence monotone,

$$\int_X (f+g)\,d\mu = \int_X f\,d\mu + \int_X g\,d\mu.$$

□

Cette propriété d'additivité se généralise comme suit.

Théorème 1.16. *Soit* (f_n) *une suite de fonctions mesurables à valeurs dans* $[0,\infty]$. *La fonction* $F = \sum_{n=1}^{\infty} f_n$ *est mesurable et*

$$\int_X F\,d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_X f_n\,d\mu.$$

Démonstration. Si on pose $F_n = \sum_{k=1}^{n} f_k$, on a d'après la proposition précédente

$$\int_X F_n\,d\mu = \sum_{k=1}^{n} \int_X f_k\,d\mu.$$

La suite des fonctions F_n est croissante de limite F, donc la suite des intégrales $\int_X F_n\,d\mu$ converge vers $\int_X F\,d\mu$. Or cette suite est aussi égale à $\sum_{k=1}^{n} \int_X f_k\,d\mu$, qui converge vers $\sum_{k=1}^{\infty} \int_X f_k\,d\mu$. Identifiant les limites, on obtient le résultat. □

Une conséquence de ce théorème est le résultat suivant. Soit h une fonction mesurable positive ou nulle sur X. Pour un ensemble mesurable E, on pose

$$\nu(E) = \int_E h\,d\mu.$$

Alors ν est une mesure sur X, on dit que μ est la mesure de *densité* h par rapport à μ.

1.3. **Fonctions intégrables.**

Soit $(X, \mathscr{M}, \mu)$ un espace mesuré.

Définition 1.17. *Une fonction* f *définie sur* X *à valeurs complexes est dite intégrable si elle est mesurable et*

$$\int_X |f|\,d\mu < \infty.$$

Si f est à valeurs réelles, l'intégrale de f est par définition le nombre

$$\int_X f\,d\mu = \int_X f^+\,d\mu - \int_X f^-\,d\mu,$$

où les fonctions f^+ et f^- sont définies par

$$f^+(x) = f(x) \quad si \quad f(x) \geq 0, \quad f^+(x) = 0 \quad si \quad f(x) < 0,$$
$$f^-(x) = -f(x) \quad si \quad f(x) \leq 0, \quad f^-(x) = 0 \quad si \quad f(x) > 0.$$

Si f est à valeurs complexes, $f = u + iv$, où u et v sont des fonctions à valeurs réelles, l'intégrale de f est définie par

$$\int_X f\,d\mu = \int_X u\,d\mu + i\int_X v\,d\mu.$$

L'ensemble $\mathscr{L}(X, \mathscr{M}, \mu)$ des fonctions intégrables est un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$ et, si f et g sont intégrables, $\alpha \in \mathbb{C}$,

$$\int_X (f+g)\,d\mu = \int_X f\,d\mu + \int_X g\,d\mu,$$
$$\int_X (\alpha f)\,d\mu = \alpha \int_X f\,d\mu.$$

Lorsque $(X, \mathscr{M}, \mu) = (\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}), \lambda)$, où λ est la mesure de Lebesgue, on dira que les fonctions de $\mathscr{L}(X, \mathscr{M}, \mu)$ sont *intégrables au sens de Lebesgue*, pour distinguer cette notion de l'intégrabilité au sens de Riemann. Nous verrons dans la section 2.4 qu'une fonction intégrable au sens de Riemann est intégrable au sens de Lebesgue. On notera

$$\int_{]\alpha,\beta[} f\,d\lambda = \int_\alpha^\beta f(x)\,dx.$$

Proposition 1.18. *Si f est une fonction intégrable,*

$$\left|\int_X f\,d\mu\right| \leq \int_X |f|\,d\mu.$$

Démonstration. Il existe un nombre complexe α de module 1 tel que

$$\int_X f\,d\mu = \alpha \left|\int_X f\,d\mu\right|.$$

La partie réelle de $\bar{\alpha}f$, notée $\mathscr{R}(\bar{\alpha}f)$, vérifie $\mathscr{R}(\bar{\alpha}f) \leq |f|$, par suite

$$\begin{aligned}\left|\int_X f\,d\mu\right| &= \bar{\alpha}\int_X f\,d\mu = \int_X \bar{\alpha}f\,d\mu \\ &= \int_X \mathscr{R}(\bar{\alpha}f)\,d\mu \leq \int_X |f|\,d\mu.\end{aligned}$$

□

On donne maintenant un énoncé provisoire du deuxième théorème fondamental de la théorie de l'intégration, le théorème de convergence dominée.

Théorème 1.19. *Soit (f_n) une suite de fonctions intégrables vérifiant*

(i) f_n converge simplement vers f, i.e. pour tout $x \in X$,

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x),$$

(ii) il existe une fonction positive intégrable g telle que pour tout n et pour tout x,

$$|f_n(x)| \leq g(x).$$

Alors la fonction f est intégrable, et

$$\lim_{n\to\infty} \int_X f_n \, d\mu = \int_X f \, d\mu.$$

Démonstration. La fonction f est mesurable comme limite simple d'une suite de fonctions mesurables, et puisque $|f| \leq g$, f est intégrable. Nous allons montrer que

$$\lim_{n\to\infty} \int_X |f_n - f| \, d\mu = 0.$$

L'énoncé s'en déduira, puisque

$$\left| \int_X f_n \, d\mu - \int_X f \, d\mu \right| \leq \int_X |f_n - f| \, d\mu.$$

On applique le lemme de Fatou à la suite de fonctions

$$h_n = 2g - |f_n - f|.$$

On obtient

$$\begin{aligned} \int_X 2g \, d\mu &\leq \liminf_{n\to\infty} \int_X (2g - |f_n - f|) \, d\mu \\ &= \int_X 2g \, d\mu - \limsup_{n\to\infty} \int_X |f_n - f| \, d\mu, \end{aligned}$$

qui donne

$$\limsup_{n\to\infty} \int_X |f_n - f| \, d\mu = 0,$$

puis

$$\lim_{n\to\infty} \int_X |f_n - f| \, d\mu = 0.$$

□

Définition 1.20. *Un ensemble N est dit négligeable s'il est mesurable et de mesure nulle.*

Une réunion dénombrable d'ensembles négligeables est négligeable. On dit qu'une propriété P a lieu presque partout sur une ensemble E s'il existe un ensemble négligeable N tel que la propriété ait lieu en tout point de $E\backslash N$. Par exemple, on dit que deux fonctions sont égales presque partout, et on note

$$f(x) = g(x) \qquad \text{p.p.}$$

s'il existe un ensemble négligeable N tel que $f(x) = g(x)$ pour tout $x \in N^c$. Si f et g sont deux fonctions intégrables égales presque partout, alors leurs intégrales sont égales. De même, on dit qu'une suite de fonctions (f_n) converge presque partout vers f et on note

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x) \qquad \text{p.p.}$$

s'il existe un ensemble négligeable N tel que

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$$

pour tout $x \in N^c$.

Proposition 1.21. *Soit f une fonction mesurable à valeurs dans* $[0, \infty]$.
(i) Pour tout nombre $\alpha > 0$,

$$\mu\left(\{x,\ f(x) \geq \alpha\}\right) \leq \frac{1}{\alpha}\int_X f\,d\mu.$$

(ii) Si $\displaystyle\int_X f\,d\mu = 0$, alors f est nulle presque partout.

Démonstration. (i) Posons

$$E_\alpha = \{x,\ f(x) \geq \alpha\}.$$

Alors $f \geq \alpha \mathbb{1}_{E_\alpha}$ donc

$$\int_X f\,d\mu \geq \alpha\mu(E_\alpha).$$

(ii) Si $\displaystyle\int_X f\,d\mu = 0$ alors pour tout $\alpha > 0$, $\mu(E_\alpha) = 0$, et l'ensemble

$$\{x,\ f(x) > 0\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_{1/n}$$

est négligeable. $\square$

Si f est une fonction mesurable à valeurs dans $[0, \infty]$ et d'intégrale finie, alors

$$N = \{x \in X,\ f(x) = \infty\}$$

est négligeable, i.e. f est finie presque partout.

Dans la suite, nous serons amenés à considérer des fonctions f qui ne sont définies que presque partout, c'est à dire dans le complémentaire d'un ensemble négligeable.

Définition 1.22. *Une fonction f définie dans le complémentaire d'un ensemble négligeable N est dite mesurable si la fonction $\hat{f}$, définie par*

$$\hat{f}(x) = f(x) \quad si \quad x \notin N, \ \ \hat{f}(x) = 0 \quad si \quad x \in N,$$

est mesurable. De même, f est dite intégrable si $\hat{f}$ l'est, et on pose

$$\int_X f\, d\mu = \int_X \hat{f}\, d\mu.$$

Le théorème de convergence dominée de Lebesgue peut alors être reformulé de la façon suivante.

Théorème 1.23. *(de convergence dominée) Soit (f_n) une suite de fonctions intégrables vérifiant*

· pour presque tout x, la suite $(f_n(x))$ a une limite $f(x)$,

· il existe une fonction positive intégrable g telle que, pour tout n et presque tout x,

$$|f_n(x)| \le g(x).$$

Alors la fonction f (qui en général n'est définie que presque partout) est intégrable et

$$\lim_{n\to\infty} \int_X f_n\, d\mu = \int_X f\, d\mu.$$

La preuve est laissée en exercice.

Théorème 1.24. *(intégration terme à terme d'une série) Soit (f_n) une suite de fonctions mesurables.*

(i) On a

$$\int_X \left(\sum_{n=1}^{\infty} |f_n| \right) d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_X |f_n|\, d\mu,$$

les deux termes pouvant prendre des valeurs finies ou infinies.

(ii) si les deux membres sont finis, chaque fonction f_n est intégrable, et la série

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$$

converge presque partout. Sa somme est une fonction intégrable et

$$\int_X \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n \right) d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_X f_n \, d\mu.$$

Démonstration. (i) Posons

$$G(x) = \sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x)|.$$

D'après le théorème 1.16,

$$\int_X G \, d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_X |f_n| \, d\mu.$$

(ii) si G est intégrable, $G(x)$ est fini presque partout, la série

$$\sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x)|$$

converge presque partout, et il en est donc de même de la série

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x).$$

Notons $F(x)$ la somme de cette série. La fonction F est définie presque partout. Posons

$$F_n(x) = \sum_{k=1}^{n} f_k(x).$$

Pour presque tout x,

$$\lim_{n \to \infty} F_n(x) = F(x),$$

et

$$|F_n(x)| \leq \sum_{k=1}^{n} |f_k(x)| \leq G(x).$$

Nous pouvons donc appliquer le théorème de convergence dominée 1.23 :

$$\begin{aligned}
\int_X F \, d\mu &= \lim_{n \to \infty} \int_X F_n \, d\mu \\
&= \lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} \int_X f_k \, d\mu \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \int_X f_k \, d\mu.
\end{aligned}$$

□

Définition 1.25. *On dit que l'espace mesuré $(X, \mathscr{M}, \mu)$ est complet si toute partie d'un ensemble négligeable est mesurable. En général ce n'est pas le cas, cependant, s'il n'est pas complet, il est possible de le compléter. On définit la tribu complétée comme suit : une partie E de X appartient à la complétée $\mathscr{M}'$ de $\mathscr{M}$ (pour μ) s'il existe $A, B \in \mathscr{M}$ tels que*

$$A \subset E \subset B \quad et \quad \mu(B \backslash A) = 0,$$

et on pose $\mu'(E) = \mu(A)$.

Exercice 1.7. important

Montrer que $\mathscr{M}'$ est une tribu, et que μ' est une mesure sur $\mathscr{M}'$ qui coïncide avec μ sur $\mathscr{M}$.

1.4. **Continuité et dérivation sous le signe somme.**

Soient $(X, \mathscr{M}, \mu)$ un espace mesuré et Λ un intervalle de $\mathbb{R}$ ou un ouvert d'un espace métrique localement compact. Soit f une fonction définie sur $X \times \Lambda$ à valeurs complexes telle que, pour tout $\lambda \in \Lambda$, la fonction $x \mapsto f(x, \lambda)$ soit intégrable. Posons

$$F(\lambda) = \int_X f(x, \lambda) d\mu.$$

Nous étudierons dans cette section les propriétés de continuité et dérivabilité de F.

Théorème 1.26. *(continuité)*

Supposons que

(i) pour presque tout x, la fonction $\lambda \mapsto f(x, \lambda)$ est continue sur Λ ;

(ii) pour tout compact $K \subset \Lambda$, il existe une fonction intégrable positive g_K sur X telle que pour tout $\lambda \in K$ et presque tout x,

$$|f(x, \lambda)| \leq g_K(x).$$

Alors la fonction F est continue sur Λ.

Démonstration. Soient $\lambda_\infty \in \Lambda$ et (λ_n) une suite de nombres de Λ qui converge vers λ_∞. Il s'agit de montrer que

$$\lim_{n \to \infty} F(\lambda_n) = F(\lambda_\infty).$$

Posons

$$f_n(x) = f(x, \lambda_n).$$

Par hypothèse,

$$\lim_{n \to \infty} f_n(x) = f(x, \lambda_\infty) \quad \mu\text{-presque partout.}$$

Soit K un voisinage compact de λ_∞. Il existe un entier N tel que si $n \geq N$, alors $\lambda_n \in K$ et donc

$$|f_n(x)| \leq g_K(x) \quad \mu\text{-presque partout.}$$

Nous pouvons appliquer le théorème de convergence dominée 1.23 :

$$\lim_{n\to\infty} \int_X f_n d\mu = \int_X f(x, \lambda_\infty) d\mu,$$

c'est à dire

$$\lim_{n\to\infty} F(\lambda_n) = F(\lambda_\infty).$$

□

Dans l'énoncé suivant, on suppose que Λ est un intervalle de $\mathbb{R}$.

Théorème 1.27. *(dérivabilité)*
Supposons qu' il existe un ensemble négligeable N tel que
(i) pour tout $x \notin N$, la fonction $\lambda \mapsto f(x, \lambda)$ est dérivable sur Λ ;
(ii) pour tout compact $K \subset \Lambda$, il existe une fonction intégrable positive g_K sur X telle que, pour tout $x \notin N$ et pour tout $\lambda \in K$,

$$\left| \frac{\partial f}{\partial \lambda}(x, \lambda) \right| \leq g_K(x).$$

Alors la fonction F est dérivable sur Λ, de dérivée

$$F'(\lambda) = \int_X \frac{\partial f}{\partial \lambda}(x, \lambda) d\mu(x).$$

Démonstration. Soit $\lambda_\infty \in \Lambda$ et (h_n) une suite de nombres réels non nuls qui tend vers 0 et telle que pour tout n, $\lambda_\infty + h_n \in \Lambda$. Posons

$$\varphi_n(x) = \frac{1}{h_n} \left(f(x, \lambda_\infty + h_n) - f(x, \lambda_\infty) \right).$$

Pour $x \notin N$,

$$\lim_{n\to\infty} \varphi_n(x) = \frac{\partial f}{\partial \lambda}(x, \lambda_\infty).$$

Par conséquent, la fonction $x \mapsto \frac{\partial f}{\partial \lambda}(x, \lambda_\infty)$ est mesurable. Soit $\delta > 0$, et posons $K = [\lambda_\infty - \delta, \lambda_\infty + \delta] \cap \Lambda$. Il existe un entier n_0 tel que si $n \geq n_0$, alors $|h_n| < \delta$. Du théorème des accroissements finis, on déduit que, si $n \geq n_0$, et pour $x \notin N$,

$$|\varphi_n(x)| \leq \sup_{\lambda \in K} \left| \frac{\partial f}{\partial \lambda}(x, \lambda) \right| \leq g_K(x).$$

D'après le théorème de convergence dominée 1.23,

$$\lim_{n\to\infty} \int_X \varphi_n d\mu = \int_X \frac{\partial f}{\partial \lambda}(x, \lambda_\infty) d\mu(x),$$

ce qui s'écrit aussi

$$\lim_{n\to\infty} \frac{F(\lambda_\infty + h_n) - F(\lambda_\infty)}{h_n} = \int_X \frac{\partial f}{\partial \lambda}(x, \lambda_\infty) d\mu(x).$$

□

2. Mesure de Lebesgue

Nous allons montrer dans ce chapitre qu'il existe une unique mesure sur la tribu borélienne de $\mathbb{R}$ telle que la mesure d'un intervalle soit égale à sa longueur. C'est la mesure de Lebesgue de la droite réelle. Pour cela, nous établirons d'abord un théorème de prolongement qui sera aussi utilisé ultérieurement pour la construction du produit de deux mesures au chapitre 3.

2.1. **Un résultat d'unicité.**

Une famille $\mathscr{C}$ de parties de Ω est appelée un λ-*système* si

(1) si $A, B \in \mathscr{C}$ et $B \subset A$, alors $A \backslash B = A \cap B^c \in \mathscr{C}$,

(2) $\mathscr{C}$ est stable par réunion monotone croissante

$$A_i \in \mathscr{C},\ i \in \mathbb{N},\ A_i \subset A_{i+1} \quad \Rightarrow \quad \bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i \in \mathscr{C}.$$

Si $\mathscr{E} \subset \mathscr{P}(X)$, on désigne par $\lambda(\mathscr{E})$ le λ-*système engendré par* $\mathscr{E}$, c'est à dire l'intersection de tous les λ-systèmes qui contiennent $\mathscr{E}$.

Pour que la définition d'un λ-système engendré par $\mathscr{E}$ ait un sens, il faut vérifier que l'intersection d'un nombre quelconque de λ-systèmes est un λ-système.

En fait on ne s'intéresse pas vraiment aux λ-systèmes en eux-mêmes, on cherche à montrer que ce sont des tribus dans certaines situations.

Proposition 2.1. *Un λ-système stable par intersection finie et contenant X est une tribu.*

Démonstration. Il s'agit d'établir la propriété (iii.d) des tribus. Pour la réunion finie, on écrit

$$A \cup B = (A^c \cap B^c)^c .$$

Pour la réunion dénombrable croissante, on écrit

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \left(\bigcup_{m=0}^{n} A_m \right).$$

□

On arrive au résultat principal concernant les classes monotones.

Théorème 2.2. *(des classes monotones). Soit $\mathscr{E}$ une classe de parties de X stable par intersection finie, et contenant X. Alors le λ-système engendré par $\mathscr{E}$ est égal à la tribu engendrée par $\mathscr{E}$.*

Démonstration. Il est clair que $\lambda(\mathscr{E}) \subset \sigma(\mathscr{E})$, puisque $\sigma(\mathscr{E})$ est un λ-système qui contient $\mathscr{E}$.

Pour la réciproque, il suffit de montrer que $\lambda(\mathscr{E})$ est stable par intersection finie. Soit

$$\lambda_1 = \{A \in \lambda(\mathscr{E}),\ \forall\ B \in \mathscr{E},\quad A \cap B \in \lambda(\mathscr{E})\}.$$

a) L'ensemble λ_1 contient $\mathscr{E}$ par définition.

b) L'ensemble λ_1 est un λ-système :

(1) Soient $A, C \in \lambda_1$, $C \subset A$. Montrons que $A\backslash C \in \lambda_1$. Soit $B \in \mathscr{E}$. Alors

$$(A\backslash C) \cap B = (A \cap B)\backslash(C \cap B) \in \lambda(\mathscr{E});$$

(2) Soit (A_n) une suite croissante d'éléments de λ_1. Montrons que $\cup_n A_n \in \lambda_1$. Soit $B \in \mathscr{E}$. Alors

$$\left(\bigcup_n A_n\right) \cap B = \bigcup_n (A_n \cap B) \in \lambda(\mathscr{E}).$$

On déduit de a) et b) que $\lambda_1 = \lambda(\mathscr{E})$. Soit maintenant

$$\lambda_2 = \{A \in \lambda(\mathscr{E}),\ \forall\ B \in \lambda(\mathscr{E}),\quad A \cap B \in \lambda(\mathscr{E})\}.$$

Montrons que $\lambda_2 = \lambda(\mathscr{E})$, et la preuve sera achevée.

b') L'ensemble λ_1 est un λ-système, c'est la même preuve que pour λ_1.

a') Montrons que λ_2 contient $\mathscr{E}$. Soit $B \in \mathscr{E}$. Pour tout $C \in \lambda(\mathscr{E})$, $C \in \lambda_1$, donc $B \cap C \in \lambda(\mathscr{E})$. C'est vrai pour tout C, donc $B \in \lambda_2$. $\square$

Théorème 2.3. *Soient μ et ν deux mesures sur $(X, \mathscr{M})$, et $\mathscr{C}$ une classe de parties de X vérifiant les propriétés suivantes :*

(i) la tribu engendrée par $\mathscr{C}$ est $\mathscr{M}$;

(ii) pour tout $A \in \mathscr{C}$, $\mu(A) = \nu(A) < \infty$;

(iii) la classe $\mathscr{C}$ est stable par intersection finie ;

(iv) il existe une suite croissante $(X_n)_{n\geq 1}$ d'éléments de $\mathscr{C}$ telle que $X = \cup_n X_n$.

Alors les mesures μ et ν sont égales.

Démonstration. Notons μ_n et ν_n les restrictions de μ et ν à X_n : par définition, $\mu_n(A) = \mu(A \cap X_n)$. Pour tout $A \in \mathscr{M}$, on a

$$\mu(A) = \lim_n \mu_n(A), \qquad \nu(A) = \lim_n \nu_n(A).$$

Il suffit donc de montrer que $\mu_n = \nu_n$ pour tout n.

Dans la suite, on fixe n. Pour tout $A \in \mathscr{C}$, on a $A \cap X_n \in \mathscr{C}$ par (iii), donc

$$\mu_n(A) = \nu_n(A) < \infty.$$

On a aussi

$$\mu_n(X) = \nu_n(X) < \infty,$$

puisque $X \cap X_n = X_n \in \mathscr{C}$. Par conséquent, μ_n et ν_n coïncident dans la classe $\mathscr{C}' = \mathscr{C} \cup \{X\}$. Par ailleurs, la classe $\mathscr{C}'$ engendre la tribu $\mathscr{M}$ et est stable par intersection.

Soit $\mathscr{D}$ la classe des $A \in \mathscr{M}$ tels que $\mu_n(A) = \nu_n(A)$. On vérifie aisément que $\mathscr{D}$ est un λ-système qui contient $\mathscr{C}'$. En vertu du théorème 2.2, et comme $\mathscr{D} \subset \mathscr{M}$ par construction, on a en fait $\mathscr{D} = \mathscr{M}$, ce qui veut dire que $\mu_n(A) = \nu_n(A)$ pour tout $A \in \mathscr{M}$, et par suite $\mu_n = \nu_n$. □

On obtient alors le résultat suivant.

Corollaire 2.4. *Soient μ et ν deux mesures sur $(X, \mathscr{M})$. Si elles coïncident sur une algèbre $\mathscr{A}$ engendrant la tribu $\mathscr{M}$ et sont σ-finies sur $\mathscr{A}$, elles sont égales.*

2.2. **Un théorème de prolongement.**

Soit X un ensemble et $\mathscr{A}$ une algèbre de Boole de parties de X Dans cette section, les ensembles de $\mathscr{A}$ seront appelés ensembles élémentaires, et une combinaison linéaire de fonctions caractéristiques d'ensembles élémentaires sera appelée fonction élémentaire.

Théorème 2.5.

Soit μ une application de $\mathscr{A}$ dans $[0, \infty]$ telle que, si (A_n) est une suite d'ensembles de $\mathscr{A}$ deux à deux disjoints dont la réunion A est dans $\mathscr{A}$, alors

$$\mu(A) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n).$$

On suppose que μ est σ-finie, c'est à dire qu'il existe une suite d'ensembles X_n de $\mathscr{A}$ tels que pour tout n, $\mu(X_n) < \infty$, et dont la réunion est égale à X. Alors μ se prolonge de façon unique en une mesure sur la tribu $\mathscr{M}$ engendrée par $\mathscr{A}$.

Ce prolongement, que nous noterons μ, possède les propriétés suivantes.

(1) Soit E un ensemble mesurable. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une suite (A_n) d'ensembles élémentaires telle que

$$E \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n,$$

et

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) \leq \mu(E) + \varepsilon.$$

(2) Soit f une fonction intégrable relativement à l'espace mesuré $(X, \mathscr{M}, \mu)$. Il existe une suite (f_n) de fonctions élémentaires intégrables telle que

$$\lim_{n\to\infty} \int_X |f_n - f| d\mu = 0.$$

Démonstration. L'unicité résulte du corollaire 2.4.

La démonstration de l'existence se fait en plusieurs étapes.

(a) Soit (A_n) une suite d'ensembles élémentaires dont la réunion contient un ensemble élémentaire A. Montrons que

$$\mu(A) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n).$$

Posons

$$B_n = A \cap A_n,$$
$$C_n = \bigcup_{k=1}^{n} B_k \backslash \left(\bigcup_{k=1}^{n-1} B_k \right),$$
$$C_1 = B_1.$$

Les ensembles C_n sont élémentaires, deux à deux disjoints, et

$$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} C_n, \quad C_n \subset B_n \subset A_n,$$

donc

$$\mu(A) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(C_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n).$$

On définit la mesure extérieure $\mu^*(E)$ d'une partie E de X par

$$\mu^*(E) = \inf \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_n),\ A_n \in \mathscr{A},\ E \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \right\}.$$

D'après ce qui précède, si E est un ensemble élémentaire, alors $\mu^*(E) = \mu(E)$.

(b) Montrons que si (E_n) est une suite de parties de X, de réunion E, alors

$$\mu^*(E) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(E_n).$$

Si $\mu^*(E_n) = \infty$ pour un certain n, c'est évident. Supposons que $\mu^*(E_n) < \infty$ pour tout n. Soit $\varepsilon > 0$. Pour tout n, il existe une suite d'ensembles élémentaires $A_{n,k}$ telle que

$$E_n \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} A_{n,k}, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_{n,k}) \leq \mu^*(E_n) + \frac{\varepsilon}{2^n}.$$

Puisque

$$E \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=1}^{\infty} A_{n,k},$$

il en résulte que

$$\mu^*(E) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_{n,k}) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(E_n) + \varepsilon.$$

Cette inégalité ayant lieu pour tout $\varepsilon > 0$, on obtient

$$\mu^*(E) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(E_n).$$

(c) La différence symétrique de deux parties A et B de X est l'ensemble

$$A \Delta B = (A \backslash B) \cup (B \backslash A),$$

ce qui peut se traduire par

$$\mathbb{1}_{A \Delta B} = |\mathbb{1}_A - \mathbb{1}_B|.$$

Définissons l'écart de A et B par

$$\delta(A, B) = \mu^*(A \Delta B).$$

On établit sans peine les propriétés suivantes :

$$\delta(A, B) \leq \delta(A, C) + \delta(C, B)$$

(car $A \backslash B \subset (A \backslash C) \cup (C \backslash B)$),

$$\delta(A_1 \cup A_2, B_1 \cup B_2) \leq \delta(A_1, B_1) + \delta(A_2, B_2)$$

(car $(A_1 \cup A_2) \backslash (B_1 \cup B_2) \subset (A_1 \backslash B_1) \cup (A_2 \backslash B_2)$),

$$\delta(A_1 \cap A_2, B_1 \cap B_2) \leq \delta(A_1, B_1) + \delta(A_2, B_2)$$

(car $(A_1 \cap A_2) \backslash (B_1 \cap B_2) \subset (A_1 \backslash B_1) \cup (A_2 \backslash B_2)$),

$$\delta(A_1 \backslash A_2, B_1 \backslash B_2) \leq \delta(A_1, B_1) + \delta(A_2, B_2)$$

(car $(A_1 \backslash A_2) \backslash (B_1 \backslash B_2) \subset (B_2 \backslash A_2) \cup (A_1 \backslash B_1)$),

$$|\mu^*(A) - \mu^*(B)| \leq \delta(A, B)$$

(car $A \subset B \cup (A \backslash B)$).

Une partie E de X est dite intégrable s'il existe une suite d'ensembles élémentaires A_n tels que $\mu(A_n) < \infty$ pour tout n, et

$$\lim_{n\to\infty} \delta(A_n, E) = 0.$$

Si E et F sont des ensembles intégrables, alors $E \cup F$, $E \cap F$ et $E \backslash F$ sont intégrables, en raison des inégalités vues plus haut. Soit E une partie de X. S'il existe une suite (E_n) d'ensembles intégrables telle que

$$\lim_{n\to\infty} \delta(E_n, E) = 0,$$

alors E est intégrable (ceci se déduit encore des inégalités plus haut).

Notons $\mathscr{M}'$ l'ensemble des parties de X qui sont réunion de suites d'ensembles intégrables. Nous allons montrer que $\mathscr{M}'$ est une tribu, et que la restriction de μ^* à $\mathscr{M}'$ est une mesure sur l'espace $(X, \mathscr{M}')$.

Remarquons que $\mathscr{A} \subset \mathscr{M}$, donc si $\mathscr{M}'$ est une tribu, alors $\mathscr{M} \subset \mathscr{M}'$.

(d) Montrons que si A et B sont deux ensembles intégrables, alors

$$\mu^*(A) + \mu^*(B) = \mu^*(A \cup B) + \mu^*(A \cap B).$$

Il existe deux suites (A_n) et (B_n) d'ensembles élémentaires telles que, pour tout n, $\mu(A_n) < \infty$, $\mu(B_n) < \infty$, et

$$\lim_{n\to\infty} \delta(A_n, A) = 0, \quad \lim_{n\to\infty} \delta(B_n, B) = 0.$$

Des propriétés de l'écart δ, il résulte que

$$\lim_{n\to\infty} \delta(A_n \cup B_n, A \cup B) = 0, \quad \lim_{n\to\infty} \delta(A_n \cap B_n, A \cap B) = 0,$$

et pour tout n,

$$\mu^*(A_n) + \mu^*(B_n) = \mu^*(A_n \cup B_n) + \mu^*(A_n \cap B_n).$$

(égalité de μ^* et μ sur les ensembles élémentaires). La relation annoncée s'en déduit par passage à la limite.

(e) Montrons que si (E_n) est une suite d'ensembles intégrables deux à deux disjoints de réunion E, alors

$$\mu^*(E) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(E_n).$$

D'après (b),

$$\mu^*(E) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(E_n).$$

D'après (d), pour tout N,

$$\mu^*\left(\bigcup_{n=1}^{N} E_n\right) = \sum_{n=1}^{N} \mu^*(E_n),$$

donc

$$\mu^*(E) \geq \sum_{n=1}^{N} \mu^*(E_n),$$

et par suite

$$\mu^*(E) \geq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(E_n).$$

(f) Soit E un ensemble de $\mathscr{M}'$ tel que $\mu^*(E) < \infty$. Montrons que E est intégrable.

L'ensemble E est une réunion d'une suite d'ensembles intégrables E_n que l'on peut supposer deux à deux disjoints, donc, d'après (e),

$$\mu^*(E) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(E_n),$$

et par suite

$$\lim_{n\to\infty} \delta\left(\bigcup_{n=1}^{N} E_n, E\right) = 0$$

car ce nombre est égal à

$$\mu^*\left(\bigcup_{n=N+1}^{\infty} E_n\right) = \sum_{n=N+1}^{\infty} \mu^*\left(E_n\right),$$

donc E est intégrable.

On déduit de (e) et (f) que si (E_n) est une suite d'ensembles de $\mathscr{M}'$ deux à deux disjoints de réunion E, alors

$$\mu^*(E) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(E_n).$$

En effet, si $\mu^*(E) < \infty$, alors E est intégrable et les E_n aussi d'après (f), on se ramène donc à (e). Si $\mu^*(E) = \infty$, alors comme on a toujours

$$\mu^*(E) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(E_n)$$

d'après (b), l'égalité est aussi vérifiée.

(g) Montrons que $\mathscr{M}'$ est une tribu.

Il est clair qu'une réunion d'une suite d'ensembles de $\mathscr{M}'$ appartient à $\mathscr{M}'$: toute réunion de suite de réunion de suite d'ensembles intégrables est une réunion de suite d'ensembles intégrables. Montrons que le complémentaire E^c d'un ensemble de $\mathscr{M}'$ appartient aussi à $\mathscr{M}'$. L'ensemble E est réunion d'une suite d'ensembles intégrables E_k. D'autre part, nous savons qu'il existe une suite (X_n) d'ensembles élémentaires intégrables dont la réunion est égale à X. De la relation

$$X_n \cap E = \bigcup_{k=1}^{\infty} (X_n \cap E_k),$$

on déduit que $X_n \cap E$ est intégrable. De même,

$$X_n \backslash E = X_n \backslash (X_n \cap E)$$

est intégrable. par suite,

$$E^c = \bigcup_{n=1}^{\infty} (X_n \backslash E)$$

appartient à $\mathscr{M}'$.

Remarquons que la tribu $\mathscr{M}'$ contient la tribu $\mathscr{M}$, puisqu'elle contient $\mathscr{A}$. De plus, μ^* définit une mesure sur $\mathscr{M}'$ qui prolonge μ sur $\mathscr{A}$.

(h) Soit f une fonction intégrable relativement à l'espace mesuré $(X, \mathscr{M}', \mu)$, et soit $\varepsilon > 0$. De la proposition 1.6 et du théorème de convergence dominée 1.23, il résulte qu'il existe une fonction intégrable étagée g telle que

$$\int_X |f - g| \leq \frac{\varepsilon}{2},$$

et de la définition des ensembles intégrables, il résulte qu'il existe une fonction intégrable élémentaire h telle que

$$\int_X |g - h| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Par suite,

$$\int_X |f - h| \leq \varepsilon$$

$\square$

Dans la suite nous aurons besoin de la propriété suivante qui se déduit directement de la partie (2) de l'énoncé du théorème de prolongement 2.5.

Proposition 2.6. *Soit f une fonction intégrable relativement à l'espace mesuré $(X, \mathscr{M}, \mu)$. Il existe une suite (u_k) de fonctions élémentaires intégrables telles que*

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(x) \quad p.p.,$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \int_X |u_k| d\mu < \infty.$$

Démonstration. il existe une suite (f_n) de fonctions élémentaires intégrables telle que

$$\lim_{n\to\infty} \int_X |f_n - f| d\mu = 0.$$

On peut extraire de la suite f_n une sous-suite f_{n_k} telle que

$$\sum_{k=1}^{\infty} \int_X |f_{n_{k+1}} - f_{n_k}| d\mu < \infty.$$

Posons

$$u_1 = f_{n_1}, \quad u_k = f_{n_k} - f_{n_{k-1}} \quad (k \geq 2).$$

La suite u_k convient. □

2.3. **Mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$.**

Soit $\mathscr{A}$ l'algèbre de Boole engendrée par les intervalles de $\mathbb{R}$: un ensemble de $\mathscr{A}$ est une réunion finie d'intervalles (que l'on peut supposer deux à deux disjoints). soit λ l'application définie sur $\mathscr{A}$ à valeurs dans $[0, \infty]$ de la façon suivante : si

$$E = \bigcup_{n=1}^{N} I_n,$$

où les ensembles I_n sont des intervalles deux à deux disjoints d'extrémités a_n et b_n, alors

$$\lambda(E) = \sum_{n=1}^{N} \lambda(I_n) = \sum_{n=1}^{N} (b_n - a_n).$$

On vérifie aisément que cette expression ne dépend pas du découpage de E en union disjointe d'intervalles. Il y a en fait une décomposition canonique : les I_n sont les composantes connexes de E.

Théorème 2.7. *Soit (E_n) une suite d'éléments de $\mathscr{A}$ deux à deux disjionts dont la réunion E appartient aussi à $\mathscr{A}$. Alors*

$$\lambda(E) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(E_n).$$

Avant de démontrer ce théorème, notons que le théorème de prolongement 2.5 nous permet d'en déduire

Théorème 2.8.

(i) Il existe une mesure unique λ sur la tribu borélienne de $\mathbb{R}$ telle que, si I est un intervalle d'extrémités a et b,

$$\lambda(I) = |b - a|.$$

(ii) De plus, si E est un ensemble borélien de mesure finie, pour tout $\varepsilon > 0$ il existe une suite (I_n) d'intervalles telle que

$$E \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n,$$

et

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda(I_n) \leq \lambda(E) + \varepsilon.$$

(iii) Si f est une fonction intégrable, il existe une suite de fonctions intégrables en escalier telle que

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} |f_n - f| \, d\lambda = 0.$$

Rappelons qu'une fonction en escalier définie sur un intervalle d'extrémités α et β $(-\infty \leq \alpha \leq \beta \leq \infty)$ est une fonction f pour laquelle il existe une subdivision

$$\alpha = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = \beta,$$

et des nombres $a_0, \ldots, a_{n-1}$ tels que

$$f(x) = a_i \quad \text{si} \quad x \in]x_i, x_{i+1}[.$$

Démonstration. du théorème 2.7.

Elle se fait en plusieurs étapes.

(a) Montrons que si $I_1, \ldots I_n$ sont des intervalles deux à deux disjoints, tous contenus dans un intervalle I, alors

$$\sum_{k=1}^{n} \lambda(I_k) \leq \lambda(I).$$

Notons a_k et b_k les extrémités de I_k, a et b celles de I. Nous pouvons supposer, quitte à renuméroter les intervalles, que

$$a \leq a_1 \leq b_1 \leq a_2 \leq \ldots \leq b_n \leq b,$$

et alors

$$\sum_{k=1}^{n} (b_k - a_k) \leq b - a$$

(la différence des deux étant la somme des $a_{i+1} - b_i$).

(b) Montrons que si $K = [a, b]$ est un intervalle fermé borné contenu dans la réunion des intervalles ouverts $U_k =]a_k, b_k[$ $(k = 1, \ldots, n)$, alors

$$\lambda(K) \leq \sum_{k=1}^{n} \lambda(U_k).$$

L'extrémité a appartient à l'un des intervalles U_k, soit U_{k_1}. Si $b_{k_1} \leq b$, il existe k_2 tel que b_{k_1} appartienne à U_{k_2}. Nous construisons ainsi une suite d'indices k, jusqu'à ce que $b_{k_m} > b$. Ainsi,

$$a_{k_1} < a < b_{k_1}, \quad a_{k_m} < b < b_{k_m}, \quad a_{k_{i+1}} < b_{k_i} < b_{k_{i+1}},$$

et par suite

$$\lambda(K) \leq \sum_{i=1}^{m} \lambda(U_{k_i})$$

(la différence des deux étant la somme des $b_{k_i} - a_{k_{i+1}}$ ajoutée à $a - a_{k_1}$ et $b_{k_m} - b$).

(c) Montrons que si (I_n) est une suite d'intervalles dont la réunion contient l'intervalle I, alors

$$\lambda(I) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(I_n).$$

Nous pouvons supposer que $\lambda(I_n) < \infty$ pour tout n, sinon c'est clair. Considérons d'abord le cas où $\lambda(I) < \infty$. Il existe un intervalle fermé borné $K \subset I$ tel que

$$\lambda(I) \leq \lambda(K) + \varepsilon,$$

et des intervalles ouverts U_n tels que $I_n \subset U_n$, et

$$\lambda(U_n) \leq \lambda(I_n) + \varepsilon 2^{-n}.$$

Les intervalles ouverts U_n recouvrent le compact K, on peut donc en extraire un recouvrement fini, et, d'après (b),

$$\lambda(K) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(U_n).$$

Par suite
$$\lambda(I) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \lambda(I_n) + 2\varepsilon.$$
Ceci étant vrai pour tout $\varepsilon > 0$, le résultat annoncé s'en déduit.

Si $\lambda(I) = \infty$, pour tout $A > 0$ il existe un intervalle compact K contenu dans I tel que $\lambda(K) \geq A$. La démonstration se poursuit comme précédemment.

(d) Montrons que si (I_n) est une suite d'intervalles deux à deux disjoints dont la réunion est un intervalle I, alors
$$\lambda(I) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(I_n).$$
De (a) il résulte que pour tout N
$$\sum_{n=1}^{N} \lambda(I_n) \leq \lambda(I),$$
et d'après (c)
$$\lambda(I) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(I_n).$$

(e) Montrons que si (E_n) est une suite d'ensembles élémentaires deux à deux disjoints dont la réunion E est aussi un ensemble élémentaire, alors
$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda(E_n) = \lambda(E).$$

Nous pouvons supposer que les ensembles E_n sont des intervalles. L'ensemble E est la réunion d'intervalles I_k, $k = 1, \ldots, N$, que l'on peut supposer deux à deux disjoints. D'après (d),
$$\lambda(I_k) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(I_k \cap E_n)$$
et aussi
$$\lambda(E_n) = \sum_{k=1}^{N} \lambda(I_k \cap E_n).$$
La première égalité donne
$$\lambda(E) = \sum_{k=1}^{N} \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(I_k \cap E_n)$$

et le résultat annoncé s'en déduit en intervertissant les sommations et en utilisant la deuxième. □

L'espace mesuré $(\mathbb{R}, \mathscr{B} = \mathscr{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ est invariant par translation, c'est à dire que si $E \in \mathscr{B}$ et $a \in \mathbb{R}$, $E + a \in \mathscr{B}$ et

$$\lambda(E + a) = \lambda(E).$$

En effet, la tribu borélienne est la plus petite tribu contenant les intervalles, et le translaté d'un intervalle est un intervalle, par suite le translaté d'un borélien est un borélien. Soit a un nombre réel. Pour tout borélien E, posons

$$\mu(E) = \lambda(E + a).$$

Ceci définit une mesure μ sur $(\mathbb{R}, \mathscr{B})$, et pour tout intervalle I,

$$\mu(I) = \lambda(I),$$

donc $\mu = \lambda$.

On va montrer qu'à une constante multiplicative près, λ est la seule mesure invariante par translation sur $\mathscr{B}$.

Proposition 2.9. *Si μ est une mesure sur $(\mathbb{R}, \mathscr{B})$ qui est invariante par translation et pour laquelle la mesure d'un intervalle borné est finie, alors il existe une constante c telle que $\mu = c\lambda$.*

Démonstration. Posons $c = \mu([0, 1[)$. Soit $I = [a, b[$ un intervalle dont les extrémités a et b sont des rationnels. Des propriétés d'additivité et d'invariance de la mesure μ, on déduit que

$$\mu([a, b[) = c(b - a).$$

Par passages à la limite on en déduit la même égalité pour les intervalles à extrémités réelles, ouverts ou fermés à droite. Par sommes finies on trouve que $\mu = c\lambda$ sur l'algèbre de Boole engendrée par les intervalles. Il ne reste plus qu'à appliquer le corollaire 2.4. □

Nous appellerons mesurable une partie de $\mathbb{R}$ appartenant à la tribu complétée de la tribu borélienne $\mathscr{B}$ relativement à la mesure de Lebesgue λ, c'est à dire qu'un ensemble E est mesurable s'il existe deux ensembles boréliens A et B tels que

$$A \subset E \subset B \quad \text{et} \quad \lambda(B \setminus A) = 0.$$

La mesure de E est alors par définition

$$\lambda(E) = \lambda(A).$$

Proposition 2.10. *Soit E un ensemble mesurable. Alors*
(i) $\lambda(E) = \inf\{\lambda(U),\ U \ \textit{ouvert},\ \ E \subset U\}$,
(ii) $\lambda(E) = \sup\{\lambda(K),\ K \ \textit{compact},\ \ K \subset E\}$.

Démonstration. (i) Si $\lambda(E) = \infty$, c'est évident. Sinon, on prend $\varepsilon > 0$. Il existe une suite d'intervalles I_n telle que

$$E \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(I_n) \leq \lambda(E) + \varepsilon,$$

et, pour tout n, il existe un intervalle ouvert U_n contenant I_n tel que

$$\lambda(U_n) \leq \lambda(I_n) + \varepsilon 2^{-n}.$$

Soit U la réunion des intervalles U_n. C'est un ouvert qui contient E et

$$\lambda(U) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(U_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(I_n) + \varepsilon \leq \lambda(E) + 2\varepsilon.$$

(ii) Supposons d'abord que $\lambda(E) < \infty$, et soit $\varepsilon > 0$. Il existe un intervalle compact I tel que

$$\lambda(E \cap I) \geq \lambda(E) - \varepsilon,$$

prendre $I = [-N, N]$ avec N suffisamment grand. Posons $F = I \backslash E$. D'après (i), il existe un ouvert U contenant F tel que

$$\lambda(U) \leq \lambda(F) + \varepsilon.$$

Posons ensuite $K = I \backslash U$. C'est un compact contenu dans E et

$$\lambda(I) = \lambda(K) + \lambda(U \cap I) \leq \lambda(K) + \lambda(F) + \varepsilon,$$

donc

$$\lambda(K) \geq \lambda(I) - \lambda(F) - \varepsilon = \lambda(E \cap I) - \varepsilon,$$

et par suite

$$\lambda(K) \geq \lambda(E) - 2\varepsilon.$$

Si $\lambda(E) = \infty$, alors pour tout $A > 0$ il existe un intervalle compact I tel que $\lambda(E \cap I) \geq A$, et la démonstration se poursuit comme précédemment. $\square$

2.4. Intégrales au sens de Riemann et de Lebesgue.

Rappelons d'abord la définition de l'intégrale au sens de Riemann sur un intervalle fermé borné $[a, b]$ de $\mathbb{R}$. Soit u une fonction en escalier définie sur $[a, b]$. Il existe une subdivision

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b,$$

et des nombres

$$a_0, \ldots a_{n-1}$$

tels que

$$u(x) = a_i \quad \text{si} \quad x \in]x_i, x_{i+1}[.$$

L'intégrale de u est définie par

$$\int_a^b u(x)\, dx = \sum_{i=0}^{n-1} a_i (x_{i+1} - x_i).$$

on vérifie que cette définition est indépendante du choix de la subdivision et que l'intégrale est une forme linéaire sur l'espace $\mathscr{E}_0(a, b)$ des fonctions en escalier sur $[a, b]$.

Si f est une fonction définie sur $[a, b]$ à valeurs réelles et bornée, on pose

$$\mathscr{U}_0(f) = \sup \left\{ \int_a^b u(x)\, dx,\ u \in \mathscr{E}_0(a, b),\ u \leq f \right\},$$

$$\mathscr{V}_0(f) = \inf \left\{ \int_a^b v(x)\, dx,\ v \in \mathscr{E}_0(a, b),\ v \geq f \right\}.$$

La fonction f est dite intégrable au sens de Riemann si $\mathscr{U}_0(f) = \mathscr{V}_0(f)$. L'intégrale au sens de Riemann de f est alors le nombre

$$\int_a^b f(x)\, dx = \mathscr{U}_0(f) = \mathscr{V}_0(f).$$

Pour qu'une fonction bornée f soit intégrable au sens de Riemann, il faut et il suffit que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe deux fonctions $u, v \in \mathscr{E}_0(a, b)$ telles que

$$u \leq f \leq v, \qquad \int_a^b (v - u)\, dx \leq \varepsilon.$$

Considérons maintenant un espace mesuré complet $(X, \mathscr{M}, \mu)$ et supposons que la masse totale de la mesure μ soit finie : $\mu(X) < \infty$. On désigne par $\mathscr{E}(X, \mathscr{M})$ l'ensemble des fonctions mesurables étagées définies sur X. Pour une fonction f définie sur X à valeurs réelles et bornées, posons

$$\mathscr{U}(f) = \sup\left\{\int_X u\,d\mu,\ u \in \mathscr{E}(X,\mathscr{M}),\ u \le f\right\},$$

$$\mathscr{V}(f) = \inf\left\{\int_X v\,d\mu,\ v \in \mathscr{E}(X,\mathscr{M}),\ f \le v\right\}.$$

Si f est mesurable, alors $\mathscr{U}(f) = \mathscr{V}(f)$, et

$$\int_X f\,d\mu = \mathscr{U}(f) = \mathscr{V}(f).$$

Réciproquement, nous allons voir que si $\mathscr{U}(f) = \mathscr{V}(f)$, alors f est mesurable. En effet, si cette égalité est vérifiée, alors pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $u, v \in \mathscr{E}(X,\mathscr{M})$ telles que

$$u \le f \le v \quad \text{et} \quad \int_X (v-u)\,d\mu \le \varepsilon.$$

Ainsi il existe des suites (u_n) et (v_n) de fonctions mesurables étagées telles que

$$u_n \le f \le v_n \quad \text{et} \quad \int_X (v_n - u_n)\,d\mu \le \frac{1}{n}.$$

Posons

$$U_n = \sup_{k\le n} u_k, \quad V_n = \inf_{k \le n} v_k.$$

Les fonctions U_n et V_n sont mesurables étagées, la suite (U_n) est croissante, la suite V_n est décroissante et

$$\int_X (V_n - U_n)\,d\mu \le \frac{1}{n}.$$

De plus,

$$\lim_{n\to\infty} \int_X U_n\,d\mu = \mathscr{U}(f), \quad \lim_{n\to\infty} \int_X V_n\,d\mu = \mathscr{V}(f).$$

Posons

$$g(x) = \lim_{n\to\infty} U_n(x), \quad h(x) = \lim_{n\to\infty} V_n(x).$$

Les fonctions g et h sont mesurables, et $g \le f \le h$. Du théorème de convergence monotone 1.12, il résulte que

$$\int_X (h-g)\,d\mu = \mathscr{V}(f) - \mathscr{U}(f) = 0,$$

donc $f = g = h$ presque partout, et

$$\int_X f\,d\mu = \mathscr{U}(f) = \mathscr{V}(f).$$

Ainsi f est mesurable relativement à l'espace mesuré $(X, \mathscr{M}, \mu)$ si et seulement si $\mathscr{U}(f) = \mathscr{V}(f)$.

Considérons le cas où $X = [a, b]$, $\mathscr{M}$ est la tribu complétée de la tribu borélienne relativement à la mesure de Lebesgue, et $\mu = \lambda$ est la mesure de Lebesgue. Pour toute fonction f définie sur $[a, b]$ à valeurs réelles et bornée,

$$\mathscr{U}_0(f) \leq \mathscr{U}(f) \leq \mathscr{V}(f) \leq \mathscr{V}_0(f).$$

Ainsi, si f est intégrable au sens de Riemann, elle l'est au sens de Lebesgue, et les deux définitions d'intégrales coïncident. Par contre, la fonction f peut être intégrable au sens de Lebesgue sans être intégrable au sens de Riemann, c'est à dire que

$$\mathscr{U}(f) = \mathscr{V}(f)$$

mais

$$\mathscr{U}_0(f) < \mathscr{V}_0(f).$$

C'est le cas pour la fonction f définie sur $[0, 1]$ par

$$f = \mathbb{1}_{\mathbb{Q} \cap [0,1]},$$

qui vérifie $\mathscr{U}_0(f) = \mathscr{U}(f) = \mathscr{V}(f) = 0$ et $\mathscr{V}_0(f) = 1$.

3. Intégration sur un espace produit

Nous verrons dans ce chapitre comment construire des mesures produits sur des produits d'espaces. Nous verrons comment l'évaluation d'une intégrale multiple peut se ramener à des évaluations successives d'intégrales simples, à l'aide des théorèmes de Fubini et Fubini-Tonelli.

3.1. **Produit de deux espaces mesurés.**

Soient $(X, \mathscr{M}, \mu)$ et $(Y, \mathscr{N}, \nu)$ deux espaces mesurés. On appelle rectangle mesurable une partie du produit $X \times Y$ de la forme $R = A \times B$, où $A \in \mathscr{M}$, $B \in \mathscr{N}$, et on note $\mathscr{M} \times \mathscr{N}$ la tribu engendrée par les rectangles mesurables. Nous allons montrer qu'il existe une mesure unique λ sur la tribu $\mathscr{M} \times \mathscr{N}$ telle que si $R = A \times B$ est un tel rectangle,

$$\lambda(R) = \mu(A)\nu(B).$$

Une réunion finie de rectangles mesurables sera appelée dans cette section ensemble élémentaire. Les ensembles élémentaires constituent une algèbre de Boole, que nous noterons $\mathscr{A}$. En effet, si $A_1, A_2 \in \mathscr{M}$, $B_1, B_2 \in \mathscr{N}$,

$$(A_1 \times B_1) \cap (A_2 \times B_2) = (A_1 \cap A_2) \times (B_1 \cap B_2),$$

et si $A \in \mathscr{M}$, $B \in \mathscr{N}$,

$$(A \times B)^c = ((A^c) \times Y) \cup (A \times B^c).$$

Proposition 3.1. *(i) Soit $Q \in \mathscr{M} \times \mathscr{N}$. Alors pour tout $x \in X$, l'ensemble*

$$Q_x = \{y \in Y,\ (x, y) \in Q\}$$

appartient à $\mathscr{N}$.

(ii) Soit f une fonction définie sur $X \times Y$ à valeurs dans $[-\infty, \infty]$, mesurable pour la tribu $\mathscr{M} \times \mathscr{N}$. Pour tout $x \in X$, la fonction f_x, définie par

$$f_x(y) = f(x, y),$$

est mesurable pour la tribu $\mathscr{N}$.

Démonstration. (i) Soit $\mathscr{S}$ l'ensemble des parties Q de $\mathscr{M} \times \mathscr{N}$ telles que, pour tout $x \in X$, l'ensemble Q_x appartienne à $\mathscr{N}$. L'ensemble $\mathscr{S}$ contient les rectangles mesurables. Ainsi, pour montrer (i), il suffit de montrer que $\mathscr{S}$ est une tribu. Or cela provient du fait que l'application $Q \mapsto Q_x$ commute avec les opérations élémentaires sur les ensembles :

$$(Q^c)_x = (Q_x)^c, \quad (P \cap Q)_x = P_x \cap Q_x, \quad \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} Q_n\right)_x = \bigcup_{n=1}^{\infty} (Q_n)_x.$$

(ii) La propriété à établir résulte de la relation

$$\{y,\ f_x(y) > \alpha\} = \{(x,y),\ f(x,y) > \alpha\}_x.$$

□

Rappelons que l'espace mesuré $(X, \mathscr{M}, \mu)$ est dit σ-fini s'il existe une suite d'ensembles mesurables (X_n) tels que

$$\mu(X_n) < \infty, \quad X = \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n.$$

Théorème 3.2. *Soient $(X, \mathscr{M}, \mu)$ et $(Y, \mathscr{N}, \nu)$ deux espaces mesurés σ-finis. Il existe une mesure unique λ sur l'espace mesurable $(X \times Y, \mathscr{M} \times \mathscr{N})$ telle que, pour tout rectangle mesurable $R = A \times B$,*

$$\lambda(R) = \mu(A)\nu(B).$$

La mesure λ est notée $\mu \otimes \nu$.

Démonstration. Soit Q un ensemble élémentaire. Il peut être décomposé en une réunion finie de rectangles mesurables deux à deux disjoints,

$$Q = \bigcup_{i=1}^{n} (A_i \times B_i) \qquad (A_i \in \mathscr{M},\ B_i \in \mathscr{N}).$$

Si une telle mesure λ existe, nécessairement

$$\lambda(Q) = \sum_{i=1}^{n} \mu(A_i)\nu(B_i).$$

On vérifie (exercice un peu délicat) que ce nombre ne dépend pas de la décomposition choisie, et ainsi cette formule définit une application $\lambda\colon \mathscr{A} \to [0, \infty]$. Notons que, si Q est un ensemble élémentaire,

$$\lambda(Q) = \int_X \nu(Q_x)\, d\mu(x).$$

En effet, si Q est élémentaire, $Q = \bigcup_{i=1}^{n} A_i \times B_i$ où les $A_i \times B_i$ sont disjoints. On a

$$\lambda(Q) = \sum_{i=1}^{n} \mu(A_i)\nu(B_i) = \sum_{i=1}^{n} \nu(B_i) \int_X \mathbb{1}_{A_i}(x)\, d\mu(x).$$

Or puisque les $A_i \times B_i$ sont disjoints,

$$Q_x = \bigcup_{i,\ x \in A_i} B_i,$$

l'union étant disjointe, donc

$$\nu(Q_x) = \sum_{i=1}^{n} \nu(B_i)\,\mathbb{1}_{A_i}(x),$$

ce qui donne le résultat en intégrant. D'après le théorème de prolongement 2.5, outre la σ-additivité qui est évidente, prendre $X_n \times Y_n$, il suffit d'établir le fait suivant : si (Q_n) est une suite croissante d'ensembles élémentaires dont la réunion Q est aussi un ensemble élémentaire, alors

$$\lim_{n\to\infty} \lambda(Q_n) = \lambda(Q).$$

Pour $x \in X$ fixé, les ensembles $(Q_n)_x)$ constituent une suite croissante de réunion Q_x, donc

$$\lim_{n\to\infty} \nu\left((Q_n)_x\right) = \nu(Q_x);$$

et d'après le théorème de convergence monotone,

$$\lim_{n\to\infty} \int_X \nu\left((Q_n)_x\right)\, d\mu(x) = \int_X \nu(Q_x)\, d\mu(x),$$

c'est à dire

$$\lim_{n\to\infty} \lambda(Q_n) = \lambda(Q).$$

□

3.2. **Intégration sur un espace produit.**

Considérons deux espaces mesurés $(X, \mathscr{M}, \mu)$ et $(Y, \mathscr{N}, \nu)$. Nous supposons qu'ils sont tous deux σ-finis et notons λ la mesure produit, $\lambda = \mu \otimes \nu$. Si A et B ($A \in \mathscr{M}$, $B \in \mathscr{N}$) sont de mesure finie, nous dirons que $R = A \times B$ est un rectangle intégrable. Une combinaison linéaire

$$f = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i\,\mathbb{1}_{A_i \times B_i}$$

de fonctions caractéristiques de rectangles intégrables sera appelée fonction intégrable élémentaire. Pour x fixé dans X,

$$y \mapsto f_x(y) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i\,\mathbb{1}_{A_i}(x)\,\mathbb{1}_{B_i}(y)$$

est une fonction mesurable étagée sur Y et la fonction F définie sur Y par

$$F(x) = \int_Y f_x(y)\, d\nu(y) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \nu(B_i)\,\mathbb{1}_{A_i}(x)$$

est mesurable étagée sur X. De plus,

$$\int_X F(x)\,d\mu(x) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mu(A_i)\nu(B_i) = \int_{X\times Y} f\,d\lambda.$$

Ainsi, pour toute fonction intégrable élémentaire,

$$\int_{X\times Y} f\,d\lambda = \int_X \left(\int_Y f_x\,d\nu\right)\,d\mu(x) = \int_Y \left(\int_X f_y\,d\mu\right)\,d\nu(y).$$

Nous allons voir que cette propriété a lieu pour toute fonction intégrable sur $X \times Y$.

Lemme 3.3. *Soit E un ensemble négligeable de $X \times Y$, c'est à dire que E est mesurable et que $\lambda(E) = 0$. Alors pour presque tout x de X,*

$$\nu(E_x) = 0.$$

Démonstration. Il s'agit de montrer que l'ensemble

$$S = \{x \in X,\ \nu(E_x) > 0\}$$

est négligeable. Puisque S est la réunion des ensembles

$$S_n = \left\{x \in X,\ \nu(E_x) \geq \frac{1}{n}\right\} \qquad (n \in \mathbb{N}^*),$$

il suffit de montrer que, pour tout x, l'ensemble S_n est négligeable. Fixons n, et soit $\varepsilon > 0$. Puisque $\lambda(E) = 0$, il existe une suite (R_k) de rectangles mesurables telle que

$$E \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} R_k, \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \lambda(R_k) \leq \frac{\varepsilon}{n}$$

(théorème 2.5). Pour $x \in S_n$, comme les $(R_k)_x$ recouvrent E_x,

$$\frac{1}{n} \leq \nu(E_x) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \nu\left((R_k)_x\right),$$

autrement dit, pour $x \in X$,

$$\frac{1}{n}1_{S_n}(x) \leq \nu(E_x)1_{S_n}(x) \leq \left(\sum_{k=1}^{\infty} \nu\left((R_k)_x\right)\right) 1_{S_n}(x),$$

donc par intégration en x,

$$\begin{aligned}\frac{1}{n}\mu(S_n) &\leq \int_{S_n} \nu(E_x)\,d\mu(x) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \int_{S_n} \nu\left((R_k)_x\right)\,d\mu(x)\\ &\leq \sum_{k=1}^{\infty} \int_X \nu\left((R_k)_x\right)\,d\mu(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda(R_k) \leq \frac{\varepsilon}{n}.\end{aligned}$$

ainsi, pour tout $\varepsilon > 0$, $\mu(S_n) \leq \varepsilon$, et S_n est négligeable. □

Théorème 3.4. *(de Fubini).*

Soit f une fonction intégrable sur $X \times Y$. Pour presque tout x de X, la fonction f_x est intégrable sur Y. la fonction F définie sur X par

$$F(x) = \int_Y f_x \, d\nu$$

est intégrable sur X et

$$\int_{X \times Y} f \, d\lambda = \int_X F \, d\mu.$$

Démonstration. D'après la proposition 2.6, il existe une suite (u_k) de fonctions intégrables élémentaires sur $X \times Y$ telle que

$$f(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(x, y) \qquad \lambda\text{−p.p.}$$

et

$$\sum_{k=1}^{\infty} \int_{X \times Y} |u_k| \, d\lambda < \infty.$$

D'après le théorème 1.16 sur l'intégration terme à terme d'une série de fonctions positives,

$$\begin{aligned}\int_X \left(\sum_{k=1}^{\infty} \int_Y |u_k(x, y)| \, d\nu(y) \right) d\mu(x)& \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \int_X \left(\int_Y |u_k(x, y)| \, d\nu(y) \right) d\mu(x) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \int_{X \times Y} |u_k| \, d\lambda < \infty.\end{aligned}$$

Donc pour presque tout x,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \int_Y |u_k(x, y)| \, d\nu(y) < \infty.$$

De plus, d'après le lemme 3.3, pour presque tout x,

$$f_x(y) = f(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(x, y) \qquad \nu\text{−p.p.}$$

Nous pouvons appliquer le théorème 1.24 sur l'intégration terme à terme d'une série : pour presque tout x, la fonction f_x est intégrable, et pour un tel x,

$$\int_Y f(x,y)\,d\nu(y) = \sum_{k=1}^{\infty} \int_Y u_k(x,y)\,d\nu(y).$$

Posons

$$F(x) = \int_Y f(x,y)\,d\nu(y),$$

$$U_k(x) = \int_Y u_k(x,y)\,d\nu(y).$$

La fonction F est définie presque partout, et, pour presque tout x,

$$F(x) = \sum_{k=1}^{\infty} U_k(x).$$

De plus,

$$|U_k(x)| \leq \int_Y |u_k(x,y)|\,d\nu(y),$$

$$\int_X |U_k(x)|\,d\mu \leq \int_{X\times Y} |u_k(x,y)|\,d\lambda,$$

donc

$$\int_X \sum_{k=1}^{\infty} |U_k(x)|\,d\mu < \infty,$$

et

$$\sum_{k=1}^{\infty} |U_k(x)| < \infty \qquad \mu\text{−p.p.}$$

Nous appliquons encore une fois le théorème 1.24 sur l'intégration terme à terme d'une série,

$$\int_X F\,d\mu = \sum_{k=1}^{\infty} \int_X U_k\,d\mu = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{X\times Y} u_k\,d\lambda.$$

Puisque

$$\sum_{k=1}^{\infty} \int_{X\times Y} u_k\,d\lambda = \int_{X\times Y} f\,d\lambda,$$

nous avons bien montré que

$$\int_{X\times Y} f\,d\lambda = \int_X \left(\int_Y f(x,y)\,d\nu(y)\right)\,d\mu(x).$$

$\square$

Théorème 3.5. *(de Fubini-Tonelli).*

Soit f une fonction mesurable sur $X \times Y$ à valeurs dans $[0, \infty]$. La fonction F définie par

$$F(x) = \int_Y f(x, y)\, d\nu(x)$$

est mesurable, et

$$\int_X F(x)\, d\mu(x) = \int_{X \times Y} f\, d\lambda.$$

Démonstration. Il existe une suite (f_n) de fonctions intégrables sur $X \times Y$ telles que

$$0 \leq f_n \leq f_{n+1} \leq f,$$

et pour tout $(x, y) \in X \times Y$,

$$\lim_{n \to \infty} f_n(x, y) = f(x, y).$$

Posons

$$F_n(x) = \int_Y f_n(x, y)\, d\nu(y).$$

D'après le théorème de Fubini 3.4,

$$\int_X F_n\, d\mu = \int_{X \times Y} f_n\, d\lambda,$$

et, d'après le théorème de convergence monotone 1.12, pour tout x,

$$F(x) = \lim_{n \to \infty} F_n(x)$$

et cette limite est croissante. En appliquant une nouvelle fois le théorème de convergence monotone, on en déduit que

$$\int_X F\, d\mu = \lim_{n \to \infty} \int_X F_n\, d\mu = \lim_{n \to \infty} \int_{X \times Y} f_n\, d\lambda = \int_{X \times Y} f\, d\lambda.$$

□

Dans la pratique, on combine les deux théorèmes de Fubini et Tonelli de la façon suivante :

Corollaire 3.6. *Soit f une fonction mesurable sur $X \times Y$ à valeurs complexes. On a les deux propriétés suivantes.*

(i)

$$\int_X \left(\int_Y |f(x, y)|\, d\nu(y) \right) d\mu(x) = \int_Y \left(\int_X |f(x, y)| d\mu(x) \right) d\nu(y).$$

Ou bien les deux membres sont égaux à un nombre réel fini ≥ 0, ou bien ils sont tous les deux infinis.

(ii) S'ils sont finis, pour presque tout x de X, la fonction f_x est intégrable sur Y. La fonction F définie sur X par

$$F(x) = \int_Y f_x \, d\nu$$

est intégrable sur X et

$$\int_{X \times Y} f \, d\lambda = \int_X F \, d\mu.$$

Il faut remarquer que le théorème 1.24 est un cas particulier de ce corollaire : c'est le cas où $Y = \mathbb{N}$ et ν est la mesure de comptage

$$\nu(\{k\}) = 1 \qquad (k \in \mathbb{N}).$$

Dans le cas où $X = Y = \mathbb{N}$ et $\mu = \nu$ est la mesure de comptage, on obtient l'énoncé suivant sur les séries doubles :

Corollaire 3.7. *Soit (u_{pq}) une série double à termes complexes.*

(i)

$$\sum_{p=0}^{\infty} \left(\sum_{q=0}^{\infty} |u_{pq}| \right) = \sum_{q=0}^{\infty} \left(\sum_{p=0}^{\infty} |u_{pq}| \right).$$

(ii) Si les deux membres de l'expression précédente sont finis, alors

$$\sum_{p=0}^{\infty} \left(\sum_{q=0}^{\infty} u_{pq} \right) = \sum_{q=0}^{\infty} \left(\sum_{p=0}^{\infty} u_{pq} \right).$$

Les séries qui interviennent dans chacun des deux membres sont toutes absolument convergentes.

3.3. **Intégration sur $\mathbb{R}^n$.**

La théorie de la mesure trouve son origine dans le calcul des aires et des volumes. Nous y arrivons maintenant après avoir développé la théorie de la mesure de Lebesgue. Nous considérerons dans ce chapitre des questions qui font intervenir, outre le calcul intégral, l'algèbre linéaire et le calcul différentiel.

3.3.1. *Mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^n$.*

Il existe une unique mesure borélienne λ_n sur $\mathbb{R}^n$ telle que la mesure du pavé $Q = I_1 \times \cdots \times I_n$, produit des n intervalles $I_1, \ldots I_n$ soit égale à

$$\lambda_n(Q) = \lambda(I_1) \ldots \lambda(I_n),$$

où λ désigne la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$. L'existence d'une telle mesure est une conséquence du théorème 3.2, et l'unicité du fait que la tribu borélienne $\mathscr{B}_n$ de $\mathbb{R}^n$ est engendrée par les pavés, et la classe des pavés est stable par intersection finie. La mesure λ_n s'appelle la mesure de Lebesgue de $\mathbb{R}^n$. Elle est invariante par translation, c'est à dire que, pour tout ensemble borélien E et tout vecteur a de $\mathbb{R}^n$,

$$\lambda_n(E+a) = \lambda_n(E).$$

Proposition 3.8. *Soit μ une mesure borélienne sur $\mathbb{R}^n$ qui est invariante par translation et pour laquelle tout ensemble compact est de mesure finie. Il existe une constante c telle que*

$$\mu = c\lambda_n.$$

Démonstration. C'est une simple généralisation de la proposition 2.9. Soit

$$Q_0 = [0,1[\times \ldots \times [0,1[$$

le cube unité, et posons $c = \mu(Q_0)$. Si

$$Q = [a_1, b_1[\times \ldots \times [a_n, b_n[$$

est un pavé pour lequel les nombres a_i et b_i sont rationnels, des propriétés d'additivité et d'invariance par translation de la mesure μ, on déduit que

$$\mu(Q) = c(b_1 - a_1)\ldots(b_n - a_n).$$

La proposition résulte alors du fait que les pavés de ce type engendrent la tribu $\mathscr{B}_n$ et forment une classe stable par intersection finie. $\square$

Proposition 3.9. *Soit T une transformation affine de $\mathbb{R}^n$,*

$$T : x \mapsto Ax + b$$

où A est une transformation linéaire inversible et b est un vecteur de $\mathbb{R}^n$. Pour tout borélien E de $\mathbb{R}^n$,

$$\lambda_n\left(T(E)\right) = |\det A| \lambda_n(E).$$

Démonstration. La mesure μ définie sur la tribu $\mathscr{B}_n$ par

$$\mu(E) = \lambda_n\left(T(E)\right)$$

est invariante par translation :

$$\mu(E + b') = \lambda_n(T(E) + Ab') = \lambda_n(T(E)) = \mu(E).$$

De plus, si E est compact, $\mu(E)$ est fini. d'après la proposition précédente 3.8, la mesure μ est proportionnelle à la mesure de Lebesgue, $\mu = c\lambda_n$, avec

$$c = \lambda_n(T(Q_0)) = \lambda_n(A(Q_0)).$$

Nous allons montrer que $c = |\det A|$. Notons que $c = c(A)$ vérifie

$$c(A_1A_2) = c(A_1)c(A_2), \qquad c(I) = 1$$

(A_1 et A_2 sont deux transformations linéaires inversibles de $\mathbb{R}^n$, et I est la transformation identique). Si D est une matrice diagonale,

$$D = \begin{pmatrix} d_1 & & \\ & \ddots & \\ & & d_n \end{pmatrix},$$

aolrs $D(Q_0)$ est un pavé dont les longueurs des côtés sont les nombres $|d_1|, \ldots, |d_n|$, donc

$$c(D) = |d_1 \cdots d_n| = |\det D|.$$

Supposons que U soit une trasformation orthogonale et soit B_n la boule unité ouverte de $\mathbb{R}^n$

$$B_n = \{x \in \mathbb{R}^n,\ \|x\| < 1\},$$

pour la norme euclidienne

$$\|x\| = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}.$$

Puisque $U(B_n) = B_n$, de la relation

$$\lambda_n(U(B_n)) = c(U)\lambda_n(B_n)$$

on déduit que $c(U) = 1$. Le résultat d'en déduit, car toute transformation linéaire A de $\mathbb{R}^n$ peut être décomposée en

$$A = U_1 D U_2,$$

où D est une matrice diagonale, U_1 et U_2 sont orthogonales. □

Corollaire 3.10. *Soit T une transformation affine de $\mathbb{R}^n$,*

$$Tx = Ax + b.$$

Si f est une fonction positive mesurable sur $\mathbb{R}^n$ ou si f est une fonction à valeurs complexes intégrable, alors

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(y)\, d\lambda_n(y) = |\det A| \int_{\mathbb{R}^n} f(Tx)\, d\lambda_n(x).$$

3.3.2. *Mesure superficielle sur la sphère.* Soit S la sphère unité de $\mathbb{R}^n$

$$S = \{x \in \mathbb{R}^n,\ x_1^2 + \cdots + x_n^2 = 1\}.$$

L'application

$$\begin{aligned}]0,\infty[\times S &\to \mathbb{R}^n\backslash\{0\} \\ (r,u) &\mapsto ru \end{aligned}$$

est un homéomorphisme. Il lui correspond un isomorphisme de tribus boréliennes de $]0,\infty[\times S$ et $\mathbb{R}^n\backslash\{0\}$.

Proposition 3.11. *Pour un borélien E de S, posons*

$$\sigma(E) = \lim_{\varepsilon \to 0+} \frac{1}{\varepsilon} \lambda_n \left(\{ x = ru,\ u \in E, 1 < r < 1 + \varepsilon \} \right).$$

Cette limite existe et σ est une mesure borélienne sur S.

Démonstration. Si E est un borélien de S, notons

$$E' = \{ x = ru,\ u \in E,\ 0 < r < 1 \},$$

et posons

$$\mu(E) = \lambda_n(E').$$

Alors μ est une mesure borélienne sur S (à démontrer) et

$$\lambda_n \left(\{ x = ru,\ u \in E,\ a < r < b \} \right) = (b^n - a^n)\mu(E)$$

(utiliser par exemple la proposition 3.9). Par suite,

$$\sigma(E) = \lim_{\varepsilon \to 0+} \frac{1}{\varepsilon} \left((1 + \varepsilon)^n - 1 \right) \mu(E) = n\mu(E).$$

□

La mesure σ est invariante par les transformations orthogonales : si U est une transformation orthogonale et si E est un borélien de S,

$$\sigma \left(U(E) \right) = \sigma(E).$$

Cette propriété découle immédiatement de la même propriété pour μ.

Proposition 3.12. *La mesure de Lebesgue λ_n sur*

$$\mathbb{R}^n \backslash \{0\} \simeq]0, \infty[\times S$$

est égale au produit des mesures $r^{n-1}\, dr$ sur $]0, \infty[$ avec σ sur S

Démonstration. Si

$$F = \{ x = ru,\ a < r < b,\ u \in E \},$$

où $0 < a < b$ et E est un borélien de S,

$$\lambda_n(F) = \frac{1}{n}(b^n - a^n)\sigma(E) = \left(\int_a^b r^{n-1}\, dr \right) \sigma(E),$$

et la classe des ensembles de ce type est stable par intersection et engendre la tribu borélienne de $\mathbb{R}^n \backslash \{0\}$. □

Posons $\omega_n = \sigma(S)$. On a $\omega_2 = 2\pi$, $\omega_3 = 4\pi$. D'après le théorème de Fubini 3.4, si f est une fonction intégrable sur $\mathbb{R}^n$, pour presque tout $r > 0$, la fonction $u \mapsto f(ru)$ est intégrable sur S et

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\, d\lambda_n(x) = \int_0^\infty \left(\int_S f(ru)\, d\sigma(u) \right) r^{n-1}\, dr.$$

En particulier, si f est radiale : $f(x) = F(\|x\|)$,

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\, d\lambda_n(x) = \omega_n \int_0^\infty F(r) r^{n-1}\, dr.$$

Nous en déduisons les conditions suivantes d'intégrabilité. Soit f une fonction mesurable sur $\mathbb{R}^n$ à valeurs réelles ou complexes et soit $R > 0$.

- si pour $\|x\| \leq R$, $|f(x)| \leq C\|x\|^{-\alpha}$ avec $\alpha < n$, alors f est intégrable dans la boule de centre 0 et de rayon R.

- si pour $\|x\| \geq R$, $|f(x)| \leq C\|x\|^{-\alpha}$ avec $\alpha > n$, alors f est intégrable dans le complémentaire de la boule de centre 0 et de rayon R.

Exercice 3.1. Évaluation de l'intégrale de Gauss

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\, dx = \sqrt{\pi}.$$

Exercice 3.2. Évaluation de

$$\omega_n = 2\frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)},$$

où

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1}\, dt,$$

en calculant de deux façons différentes

$$I_n = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\|x\|^2}\, d\lambda_n(x).$$

3.3.3. *La formule de changement de variables.*

Soient U et V deux ouverts de $\mathbb{R}^n$, et $\varphi\colon\ U \to V$ une application de classe C^1. Nous supposons que φ est bijective, et que le déterminant jacobien $J\varphi(x)$ de φ ne s'annule en aucun point de U. Alors φ^{-1} est aussi de classe C^1, et sous ces conditions, on dit que φ est un difféomorphisme de U sur V. L'application $E \mapsto \varphi(E)$ est un isomorphisme de la tribu borélienne de U sur celle de V, et $E \mapsto \lambda_n(\varphi(E))$ est une mesure borélienne sur U.

Théorème 3.13.

(i) Pour tout borélien E de U,

$$\lambda_n\left(\varphi(E)\right) = \int_E |J\varphi(x)| d\lambda_n(x).$$

(ii) Pour toute fonction f mesurable sur V à valeurs dans $[0, \infty]$,

$$\int_V f(y)\, d\lambda_n(y) = \int_U f\left(\varphi(x)\right) |J\varphi(x)|\, d\lambda_n(x).$$

(iii) Pour toute fonction f intégrable sur V à valeurs réelles ou complexes, la fonction $(f \circ \varphi)|J\varphi|$ est intégrable sur U et

$$\int_V f(y)\, d\lambda_n(y) = \int_U f\left(\varphi(x)\right) |J\varphi(x)|\, d\lambda_n(x).$$

Démonstration. Avant de commencer la démonstration, remarquons que si les propriétés (i), (ii) et (iii) sont vraies pour des difféomorphismes

$$\varphi : U \to V, \qquad \psi : V \to W,$$

alors elles sont vraies pour

$$\theta = \psi \circ \varphi : U \to W.$$

C'est une conséquence de la relation

$$J(\psi \circ \varphi)(x) = J\psi\left(\varphi(x)\right) J\varphi(x) \qquad (x \in U).$$

(a) Montrons d'abord que la propriété (i) implique les propriétés (ii) et (iii). Si f est la fonction caractéristique du borélien F de V, alors $f \circ \varphi$ est la fonction caractéristique du borélien $E = \varphi^{-1}(F)$, donc

$$\int_F d\lambda_n(y) = \lambda_n\left(\varphi(E)\right) = \int_E |J\varphi(x)|\ d\lambda_n(x)$$

d'après (i), c'est à dire

$$\int_V f(y)\, d\lambda_n(y) = \int_U f\left(\varphi(x)\right) |J\varphi(x)|\ d\lambda_n(x).$$

Si f est une fonction mesurable étagée, c'est à dire une combinaison linéaire de fonctions caractéristiques d'ensembles boréliens, la propriété a encore lieu par linéarité.

Soit f une fonction mesurable sur V à valeurs dans $[0, \infty]$. Il existe une suite croissante de fonctions mesurables étagées (f_k) qui converge vers f (proposition 1.6). D'après ce qui précède, pour tout k,

$$\int_V f_k(y)\, d\lambda_n(y) = \int_U f_k\left(\varphi(x)\right) |J\varphi(x)| d\lambda_n(x).$$

Le théorème de convergence monotone 1.12 nous permet de passer à la limite,

$$\int_V f(y)\, d\lambda_n(y) = \int_U f\left(\varphi(x)\right) |J\varphi(x)| d\lambda_n(x).$$

Nous avons montré que (i) implique (ii).

Soit f une fonction intégrable sur V à valeurs complexes. D'après la propriété (ii),

$$\int_V |f(y)|\, d\lambda_n(y) = \int_U |f\left(\varphi(x)\right)| |J\varphi(x)| d\lambda_n(x),$$

donc la fonction
$$x \mapsto f\left(\varphi(x)\right)|J\varphi(x)|$$
est intégrable sur U. En décomposant f en
$$f = f_1 + if_2 = (f_1^+ - f_1^-) + i(f_2^+ - f_2^-),$$
où f_1^+, f_1^-, f_2^+, f_2^- sont des fonctions positives, on en déduit la propriété (iii).

(b) Nous allons démontrer le théorème par récurrence sur la dimension. Supposons d'abord $n = 1$. Si E est un intervalle d'extrémités α et β, $\varphi(E)$ est un intervalle d'extrémités $\varphi(\alpha)$ et $\varphi(\beta)$, donc
$$\lambda_1\left(\varphi(E)\right) = |\varphi(\beta) - \varphi(\alpha)| = \left|\int_\alpha^\beta \varphi'(x)\,dx\right|.$$

Puisque φ' garde un signe constant sur $[\alpha, \beta]$,
$$\lambda_1\left(\varphi(E)\right) = \int_\alpha^\beta |\varphi'(x)|\,dx.$$
On a montré que les mesures $\lambda_1 \circ \varphi(\cdot)$ et $\displaystyle\int_\cdot |\varphi'(x)|\,dx$ coïncidaient sur les intervalles. La tribu borélienne de U étant engendrée par les intervalles contenus dans U et la classe des intervalles étant stable par intersection, la propriété (i) est démontrée, et d'après (a) les propriétés (ii) et (iii) aussi.

Supposons que l'énoncé soit vrai pour $n - 1$.

(c) Supposons d'abord que φ est un difféomorphisme de la forme
$$\begin{aligned} y_1 &= \varphi_1(x_1, \dots, x_n) \\ &\vdots \\ y_{n-1} &= \varphi_{n-1}(x_1, \dots, x_n) \\ y_n &= x_n. \end{aligned}$$

Pour $x \in \mathbb{R}^n$, on note $x = (x', t)$, avec $x' = (x_1, \dots, x_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1}$, $t = x_n \in \mathbb{R}$. Si E est un ensemble de $\mathbb{R}^n$, on notera
$$E_t = \{x' \in \mathbb{R}^{n-1},\ (x', t) \in E\}.$$
Soit E un borélien de U, et $F = \varphi(E)$. Alors
$$F_t = \varphi_t(E_t),$$
où φ_t est le difféomorphisme de U_t dans V_t défini par
$$\varphi_t(x') = \varphi(x', t).$$

On vérifie que

$$J\varphi_t(x') = J\varphi(x', t).$$

D'après l'hypothèse de récurrence,

$$\begin{aligned}\lambda_{n-1}(F_t) =& \lambda_{n-1}\left(\varphi_t(E_t)\right) \\ =& \int_{E_t} |J\varphi_t(x')|\, d\lambda_{n-1}(x') \\ =& \int_{E_t} |J\varphi(x', t)|\, d\lambda_{n-1}(x').\end{aligned}$$

Puisque la mesure λ_n est égale au produit de λ_{n-1} et $\lambda_1 = \lambda$,

$$\begin{aligned}\lambda_n\left(\varphi(E)\right) =& \lambda_n(F) = \int_{\mathbb{R}} \lambda_{n-1}(F_t)\, dt \\ =& \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{E_t} |J\varphi(x', t)|\, d\lambda_{n-1}(x') \right) dt \\ =& \int_E |J\varphi(x)|\, d\lambda_n(x).\end{aligned}$$

La propriété (i) est ainsi démontrée pour un tel difféomorphisme, et par suite, d'après (a), les propriétés (ii) et (iii) le sont aussi.

(d) Supposons maintenant que U est un pavé ouvert et que φ est un difféomorphisme de U sur un ouvert V tel que $\dfrac{\partial \varphi_1}{\partial x_1}$ ne s'annule pas. Soit ψ l'application définie par, si $z = \psi(x)$,

$$\begin{aligned}z_1 =& \varphi_1(x_1, \ldots, x_n), \\ z_2 =& x_2, \\ & \vdots \\ z_n =& x_n.\end{aligned}$$

L'application ψ est un difféomorphisme de U sur un ouvert W. En effet, ψ est injective et

$$J\psi = \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} \neq 0.$$

L'application $\theta = \varphi \circ \psi^{-1}$ est un difféomorphisme de W sur V qui conserve la première coordonnée. Les difféomorphismes ψ et θ sont du type étudié en (c), donc l'énoncé est vrai pour ψ et θ, et par suite pour $\varphi = \theta \circ \psi$.

Soit φ un difféomorphisme de U sur V. En tout point x de U, quitte à permuter les coordonnées de l'espace d'arrivée (ce qui revient à composer par une application linéaire orghogonale pour laquelle on a déjà démontré que le théorème s'applique), l'une des dérivées $\dfrac{\partial \varphi_i}{\partial x_i}$ ne s'annule pas, et il existe un pavé ouvert U_x contenant x sur lequel cette dérivée ne s'annule pas. Si E est un pavé contenu dans U_x, la propriété (i) a lieu d'après ce qui précède. On en déduit que si E est une réunion finie de pavés contenus dans U,

$$\lambda_n(\varphi(E)) = \int_E |J\varphi(x)|\, d\lambda_n(x).$$

Cette égalité entre mesures se prolonge à la tribu borélienne (c'est une conséquence du théorème de prolongement 2.5). Ainsi, la propriété (i) est démontrée, et nous avons vu qu'elle implique les propriétés (ii) et (iii). □

3.4. **Convolution.**

Le produit de convolution entre fonctions permet de régulariser les fonctions, c'est à dire de les approcher par des fonctions très régulières, par exemple de classe C^∞. Le produit de convolution de deux mesures est un outil indispensable en probabilités pour caractériser la loi de la somme de variables aléatoires indépendantes.

3.4.1. *Convolution et invariance par translation. Exemples.*

Définition 3.14. *On désignera par $\mathscr{L}^1(\mathbb{R}^d)$ l'ensemble des fonctions boréliennes sur $\mathbb{R}^d$, à valeurs réelles, intégrables par rapport à la mesure de Lebesgue λ_d. Pour $f \in \mathscr{L}^1(\mathbb{R}^d)$ on notera $\|f\|_1 = \int_{\mathbb{R}^d} f\, d\lambda_d$.*

On désignera par $L^1(\mathbb{R}^d)$ l'ensemble des classes d'équivalences de $\mathscr{L}^1(\mathbb{R}^d)$ pour la relation d'équivalence $f = g$ λ_d-presque partout.

Il est clair que si $f, g \in \mathscr{L}^1(\mathbb{R}^d)$ sont dans la même classe d'équivalence, alors $\|f\|_1 = \|g\|_1$. Par conséquent, la norme $\|\cdot\|_1$ est bien définie sur $L^1(\mathbb{R}^d)$.

Théorème 3.15. $(L^1(\mathbb{R}^d), \|\cdot\|_1)$ *est un espace de Banach.*

Démonstration. La complétude est une conséquence directe du théorème 1.24 qui dit que les séries normalements convergentes sont convergentes. C'est aussi le théorème de Riesz-Fischer 4.6 exposé au chapitre suivant. □

Théorème 3.16. *Soient f et g deux fonctions de $\mathscr{L}^1(\mathbb{R}^d)$. Pour presque tout x, l'application*

$$y \mapsto f(x-y)g(y)$$

est intégrable. la fonction $f * g$ qui est définie presque partout par

$$f * g(x) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x-y)g(y)\,dy$$

est intégrable, et

$$\|f * g\|_1 \leq \|f\|_1 \|g\|_1.$$

La loi de composition interne ainsi définie sur l'espace de Banach $L^1(\mathbb{R}^d)$ en fait une algèbre de Banach commutative.

Rappelons qu'une algèbre normée A (sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) est une algèbre munie d'une norme d'espace vectoriel vérifiant de plus l'inégalité

$$\|ab\| \leq \|a\|\|b\|,$$

pour tous $a, b \in A$, et qu'une algèbre de Banach est une algèbre normée complète.

Démonstration. a) D'après le théorème de Fubini-Tonelli 3.5,

$$\int_{\mathbb{R}^d} \left(\int_{\mathbb{R}^d} |f(x-y)||g(y)|\,dx \right) dy = \|f\|_1 \int_{\mathbb{R}^d} |g(y)|\,dy = \|f\|_1 \|g\|_1.$$

donc l'application $(x, y) \mapsto f(x-y)g(y)$ est intégrable sur $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$. D'après le théorème de Fubini 3.4, pour presque tout x la fonction est intégrable sur $\mathbb{R}^d$. De plus,

$$|f * g(x)| \leq \int_{\mathbb{R}^d} \left(\int_{\mathbb{R}^d} |f(x-y)||g(y)|\,dx \right) dy,$$

donc

$$\|f * g\|_1 \leq \|f\|_1 \|g\|_1.$$

Le produit de convolution est commutatif :

$$f * g = g * f.$$

Pour le voir, il suffit de faire le changement de variables $y' = x - y$.

b) Montrons que le produit de convolution est associatif. Si f, g, h sont trois fonctions de $\mathscr{L}^1(\mathbb{R}^d)$,

$$\begin{aligned}(f * (g * h))(x) &= \int_{\mathbb{R}^d} f(x-y)(g * h)(y)\,dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} \left(\int_{\mathbb{R}^d} f(x-y)g(y-z)h(z)\,dz \right) dy.\end{aligned}$$

Or, pour presque tout x,
$$\int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d} |f(x-y)||g(y-z)||h(z)|\,dydz < \infty,$$
donc, d'après le théorème de Fubini, pour un tel x,
$$(f*(g*h))\,(x) = \int_{\mathbb{R}^d}(f*g)(x-z)g(z)\,dz = ((f*g)*h)\,(x).$$
Donc les fonctions $(f*(g*h))$ et $((f*g)*h)$ sont égales presque partout. □

Définition 3.17. *Pour $f, g \in \mathscr{L}^1(\mathbb{R}^d)$ $f*g$ s'appelle produit de convolution de f et g.*

Le groupe $\mathbb{R}^d$ agit par translation sur les fonctions définies sur $\mathbb{R}^d$. Si $a \in \mathbb{R}^d$, la translatée $\tau_a f$ d'une fonction f est définie par
$$\tau_a f(x) = f(x-a).$$
Pour tout $a \in \mathbb{R}^d$,
$$(\tau_a f)*g = f*(\tau_a g) = \tau_a(f*g).$$
Ceci est aussi obtenu par changement de variables. On peut aussi considérer que $f*g$ est une combinaison linéaire généralisée des translatées de la fonction f :
$$f*g(x) = \int_{\mathbb{R}^d}(\tau_a f)(x)g(a)\,da.$$

Exercice 3.3. Pour $\alpha > 0$, posons
$$G_\alpha(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\alpha}}e^{-\frac{x^2}{2\alpha}}.$$
Montrer que
$$G_\alpha * G_\beta = G_{\alpha+\beta}.$$

Exercice 3.4. Pour $\alpha > 0$, posons
$$Y_\alpha(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}x^{\alpha-1} \quad \text{si} \quad x>0, \quad Y_\alpha(x) = 0 \quad \text{sinon}.$$
Montrer que
$$Y_\alpha * Y_\beta = Y_{\alpha+\beta}.$$
Indication : on utilisera l'identité
$$B(\alpha,\beta) := \int_0^1 (1-t)^{\alpha-1}t^{\beta-1}\,dt = \frac{\Gamma(\alpha)(\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}.$$

3.4.2. *Convolution des mesures bornées.* Pour définir le produit de convolution on aura besoin de la notion de mesure image.

Soient $(X, \mathscr{M})$ et $(Y, \mathscr{N})$ deux espaces mesurables, $\psi : X \to Y$ une application mesurable. μ une mesure sur X.

On définit une fonction $\nu := \psi(\mu)$ sur $\mathscr{N}$, notée aussi $\mu \circ \psi^{-1}$, par

$$\forall B \in \mathscr{N}, \quad \nu(B) = \mu\left(\psi^{-1}(B)\right)$$

Proposition 3.18. *La fonction ν est une mesure sur $\mathscr{N}$,*

Démonstration. La preuve est laissée en exercice. C'est une conséquence immédiate de la commutation de ψ^{-1} avec les opérations élémentaires sur les ensembles. □

Définition 3.19. *ν est appelée mesure image de μ par ψ.*

Proposition 3.20. *Soient $(X, \mathscr{M})$ et $(Y, \mathscr{N})$ deux espaces mesurables, $\psi : X \to Y$ une application mesurable. μ une mesure sur X, et $\nu := \psi(\mu)$.*

(i) Si $f : Y \to [0, \infty]$ est mesurable alors

$$\int_Y f d\nu = \int_X f \circ \psi d\mu.$$

(ii) Soit $f : Y \to \mathbb{C}$ mesurable. Alors f est ν-intégrable si et seulement si $f \circ \psi$ est μ-intégrable, et dans ce cas on a

$$\int_Y f d\nu = \int_X f \circ \psi d\mu.$$

Démonstration. La preuve est aussi laissée en exercice. On commence par remarquer que pour $B \in \mathscr{N}$ et $f = 1_B$, on a

$$\mu\left(\psi^{-1}(B)\right) = \int_X f \circ \psi \, d\mu.$$

Ensuite le schéma de preuve est comme d'habitude : fonctions étagées, fonctions positives, fonctions intégrables. □

Définition 3.21. *Soient μ et ν deux mesures σ-finies sur l'espace $(\mathbb{R}^d, \mathscr{B}(\mathbb{R}^d))$. On appelle produit de convolution de μ et ν et on note $\mu * \nu$ l'image de la mesure $\mu \otimes \nu$ par l'application ψ de $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$ dans $\mathbb{R}^d$ définie par $(x, y) \mapsto x + y$:*

$$\mu * \nu = \psi(\mu \otimes \nu) = (\mu \otimes \nu) \circ \psi^{-1}.$$

Ainsi, $\mu * \nu$ est une mesure sur $\mathbb{R}^d$, qui est donnée par

$$\mu * \nu(A) = \int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d} 1_A(x + y) \, d\left(\mu \otimes \nu\right)(x, y).$$

En utilisant le théorème de Fubini, on peut aussi écrire

$$\mu * \nu(A) = \int \mu(dx) \int \mathbb{1}_A(x+y)\nu(dy) = \int \nu(dy) \int \mathbb{1}_A(x+y)\mu(dx).$$

On en déduit que le produit de convolution est commutatif. En remarquant que le produit de mesures est associatif, on prouve que le produit de convolution est aussi associatif, i.e.

$$(\mu * \nu) * \eta = \mu * (\nu * \eta),$$

à condition que les deux mesures $\mu * \nu$ et $\nu * \eta$ soient σ-finies.

On notera que pour $f : \mathbb{R}^d \times [0, \infty]$ mesurable, on a

$$\int_{\mathbb{R}^d} f(z) d(\mu * \nu)(z) = \int_{\mathbb{R}\delta \times \mathbb{R}^d} f(x+y) d(\mu \otimes \nu)(x,y).$$

Pour $f : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}$ mesurable, alors f est $\mu * \nu$-intégrable si et seulement si $(x,y) \mapsto f(x+y)$ est $\mu \otimes \nu$ intégrable et dans ce cas

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^d} f(z) d(\mu * \nu)(z) &= \int_{\mathbb{R}\delta \times \mathbb{R}^d} f(x+y) d(\mu \otimes \nu)(x,y) \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} \left(\int_{\mathbb{R}^d} f(x+y) d\mu(x) \right) d\nu(y).\end{aligned}$$

Le lien avec la convolution de fonctions est donné par la proposition suivante.

Proposition 3.22. *Si μ a une densité f par rapport à la mesure de Lebesgue et ν a une densité g par rapport à la mesure de Lebesgue, alors $\mu * \nu$ a une densité $f * g$ par rapport à la mesure de Lebesgue.*

Exemple 3.1. Si $\mu = \delta_0$ est la masse de Dirac en 0, alors $\mu * \nu = \nu$.

Exemple 3.2. La masse totale de $\mu * \nu$ est $\mu(\mathbb{R}^d)\nu(\mathbb{R}^d)$. En particulier, si μ et ν sont des mesures bornées (resp. des probabilités) alors $\mu * \nu$ est une mesure bornée (resp. une probabilité).

Exemple 3.3. Si $\mu = \nu = \lambda_d$ est la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^d$, alors le produit $\eta = \mu * \nu$ est la mesure donnée par $\eta(A) = 0$ si $\lambda_d(A) = 0$ et $\eta(A) = \infty$ si $\lambda_d(A) > 0$: cela découle immédiatement de Fubini-Tonelli.

Exemple 3.4. Soient $a, b \in \mathbb{R}^d$. Le produit de convolution des masses de Dirac δ_a et δ_b est δ_{a+b}.

Proposition 3.23. *Si f est une fonction borélienne, positive ou intégrable par rapport au produit de convolution $\mu * \nu$, alors*

$$\int f \, d(\mu * \nu) = \int \mu(dx) \int f(x+y)\nu(dy) = \int \nu(dy) \int f(x+y)\mu(dx).$$

Démonstration. Lorsque $f \geq 0$, cette formule se déduit de la formule pour $\mathbb{1}_A$ selon le schéma habituel : par linéarité, puis par limite croissante. Lorsque f est de signe quelconque et intégrable par rapport au produit de convolution, les formules sont vraies pour f^+ et f^-, et donnent des valeurs finies, donc on a la formule pour f par différence. $\square$

4. Espaces L^p

Les espaces L^p jouent un rôle important en analyse fonctionnelle. Nous verrons dans ce chapitre que L^p est un espace de Banach, c'est à dire un espace vectoriel normé complet. C'est le théorème de Riesz-Fischer. En particulier, L^2 est un espace de Hilbert. C'est un résultat important par ses applications à l'analyse. Il n'y a pas d'énoncé analogue pour l'intégrale de Riemann, et nous avons ici l'une des principales justifications de l'introduction de la théorie de l'intégrale de Lebesgue.

4.1. **Inégalités de Hölder et de Minkowski, espaces $\mathscr{L}^p$.**

Soit $(X\mathscr{M},\mu)$ un espace mesuré. Pour $1 \leq p < \infty$ on note

$$\mathscr{L}^p(X,\mathscr{M},\mu)$$

l'ensemble des fonctions mesurables f à valeurs complexes telles que

$$\int_X |f|^p \, d\mu < \infty,$$

et pour une telle fonction, on pose

$$\|f\|^p = \left(\int_X |f|^p \, d\mu\right)^{\frac{1}{p}}$$

Pour $p = 1$, il est clair que $\mathscr{L}^1(X,\mathscr{M},\mu)$ est un espace vectoriel, c'est l'espace des fonctions intégrables, et $f \mapsto \|f\|_1$ est une semi-norme. Pour $p > 1$, ce sont les inégalités de Hölder et de Minkowski qui permettront de montrer que $\mathscr{L}^p(X,\mathscr{M},\mu)$ est un espace vectoriel, et que $f \mapsto \|f\|_p$ est une semi-norme sur cet espace. Nous allons d'abord établir le lemme de convexité suivant.

Lemme 4.1. *Soient $\alpha, \beta \geq 0$, tels que $\alpha+\beta = 1$, et soient $u, v \in [0,\infty]$. Alors*

$$u^\alpha v^\beta \leq \alpha u + \beta v.$$

Démonstration. On peut supposer que $0 < u, v < \infty$, sinon l'inégalité est évidente, et donc poser $u = e^s$, $v = e^t$. La fonctions exponentielle étant convexe,

$$e^{\alpha s+\beta t} \leq \alpha e^s + \beta e^t,$$

c'est à dire

$$u^\alpha v^\beta \leq \alpha u + \beta v.$$

$\square$

Deux nombres réels positifs p et q sont appelés exposants conjugués s'ils vérifient la relation

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Cette relation implique que p et q sont supérieurs à 1. Notons que $p = 2$ est égal à son conjugué $q = 2$. Si p tend vers 1, alors q tend vers l'infini. On dira que 1 et ∞ sont conjugués.

Théorème 4.2. *(inégalités de Hölder et de Minkowski).*

Soient p et q deux exposants conjugués, $1 < p, q < \infty$, et soient f et g deux fonctions mesurables à valeurs dans $[0, \infty]$. L'inégalité de Hölder s'écrit

$$\int_X fg\, d\mu \leq \left(\int_X f^p\, d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_X g^q\, d\mu\right)^{\frac{1}{q}},$$

et l'inégalité de Minkowski

$$\left(\int_X (f+g)^p\, d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\int_X f^p\, d\mu\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_X g^p\, d\mu\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Démonstration. (a) inégalité de Hölder.

Posons

$$A = \left(\int_X f^p\, d\mu\right)^{\frac{1}{p}}, \qquad B = \left(\int_X g^q\, d\mu\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Si $A = 0$, alors $f = 0$ p.p., donc $\displaystyle\int_X fg\, d\mu = 0$. Si $A = \infty$, alors l'inégalité est évidente. On peut donc supposer que $0 < A, B < \infty$. Posons alors

$$F = \frac{f}{A}, \qquad G = \frac{g}{B}.$$

D'après le lemme 4.1 appliqué avec $u = F(x)^p$, $v = G(x)^q$, $\alpha = \dfrac{1}{p}$, $\beta = \dfrac{1}{q}$,

$$F(x)G(x) \leq \frac{1}{p}F(x)^p + \frac{1}{q}G(x)^q,$$

et en intégrant,

$$\int_X FG\, d\mu \leq \frac{1}{p}\int_X F^p\, d\mu + \int_X G^q\, d\mu = 1,$$

qui est l'inégalité à démontrer.

(b) inégalité de Minkowski.

Si $\int_X f^p\,d\mu = \infty$, ou si $\int_X g^p\,d\mu = \infty$, ou si $\int_X (f+g)^p\,d\mu = 0$, l'inégalité est évidente. On peut donc supposer que

$$\int_X f^p\,d\mu < \infty, \quad , \int_X g^p\,d\mu < \infty, \quad \int_X (f+g)^p\,d\mu > 0.$$

Puisque pour $p > 1$, la fonction $t \mapsto t^p$ est convexe,

$$\left(\frac{f+g}{2}\right)^p \le \frac{1}{2}(f^p + g^p),$$

et donc

$$\int_X (f+g)^p\,d\mu < \infty.$$

Appliquons l'inégalité de Hölder au produit $f(f+g)^{p-1}$,

$$\int_X f(f+g)^{p-1}\,d\mu \le \left(\int_X f^p\,d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_X (f+g)^p\,d\mu\right)^{\frac{1}{q}},$$

car $(p-1)q = p$, et de même au produit $g(f+g)^{p-1}$,

$$\int_X g(f+g)^{p-1}\,d\mu \le \left(\int_X g^p\,d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_X (f+g)^p\,d\mu\right)^{\frac{1}{q}},$$

et additionnons ces deux inégalités,

$$\int_X (f+g)^p\,d\mu \le \left(\int_X f^p\,d\mu + \int_X g^p\,d\mu\right) \left(\int_X (f+g)^p\,d\mu\right)^{\frac{1}{q}}.$$

L'inégalité à démontrer s'en déduit en divisant par

$$\left(\int_X (f+g)^p\,d\mu\right)^{\frac{1}{q}}.$$

□

Corollaire 4.3. *Pour* $1 \le p < \infty$, *l'ensemble* $\mathscr{L}^p(X, \mathscr{M}, \mu)$ *est un espace vectoriel sur* $\mathbb{C}$ *et l'application* $f \mapsto \|f\|_p$ *est une semi-norme sur cet espace vectoriel. En particulier, pour toutes fonctions* $f, g \in \mathscr{L}^p(X, \mathscr{M}, \mu)$,

$$\|f+g\|_p \le \|f\|_p + \|g\|_p.$$

Démonstration. C'est une conséquence de l'inégalité de Minkowski. □

Corollaire 4.4. *Soient p et q deux exposants conjugués, $1 < p, q < \infty$, soient f une fonction de $\mathscr{L}^p$ et g une fonction de $\mathscr{L}^q$. Alors le produit fg est intégrable et*

$$\left|\int_X fg\,d\mu\right| \leq \left(\int_X |f|^p\,d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_X |g|^q\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Cette inégalité est aussi appelée inégalité de Hölder. Lorsque $p = q = 2$, c'est l'inégalité de Schwarz.

Démonstration. C'est une conséquence du théorème 4.2, appliqué à $|f|$ et $|g|$. □

Une fonction mesurable à valeurs complexes est dite essentiellement bornée s'il existe un nombre M tel que

$$\mu\left(\{x,\ |f(x)| > M\}\right) = 0.$$

La borne inférieure des nombres M pour lesquels ceci a lieu est appelé la borne supérieure essentielle de f, et est notée $\|f\|_\infty$. On note $\mathscr{L}^\infty(X, \mathscr{M}, \mu)$ l'ensemble des fonctions mesurables à valeurs complexes essentiellement bornées. L'ensemble $\mathscr{L}^\infty(X, \mathscr{M}, \mu)$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$ et l'application $f \mapsto \|f\|_\infty$ est une semi-norme sur cet espace vectoriel.

Si $f \in \mathscr{L}^1$ et $g \in \mathscr{L}^\infty$, alors fg est intégrable, et

$$\left|\int_X fg\,d\mu\right| \leq \|g\|_\infty \int_X |f|\,d\mu.$$

En effet, pour presque tout x,

$$|f(x)g(x)| \leq \|g\|_\infty |f(x)|.$$

4.2. **Espaces L^p, théorème de Riesz-Fischer.**

Soient $(X, \mathscr{M}, \mu)$ un espace mesuré et $1 < p < \infty$. L'application $f \mapsto \|f\|^p$ est une semi-norme sur $\mathscr{L}^p(X, \mathscr{M}, \mu)$, mais en général ce n'est pas une norme. En effet, $\|f\|_p = 0$ si et seulement si f est nulle presque partout. La relation

$$f = g \qquad \text{p.p.}$$

est une relation d'équivalence sur $(\mathscr{L}^p(X, \mathscr{M}, \mu)$ et l'espace quotient, noté $L^p(X, \mathscr{M}, \mu)$, est un espace vectoriel normé. Nous allons voir que cet espace est complet, c'est à dire que $(L^p(X, \mathscr{M}, \mu)$ est un espace de Banach. Pour cela nous allons montrer que toute série normalement convergente est convergente. En effet, pour qu'un espace vectoriel normé soit complet il faut et il suffit que toute série normalement convergente soit convergente. Nous verrons au début de la démonstration du théorème 4.6 comment s'établit ce résultat.

Théorème 4.5. *Supposons* $1 \leq p < \infty$ *et soit* (f_n) *une suite de fonctions de* $\mathscr{L}^p(X, \mathscr{M}, \mu)$ *telle que*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|f_n\|_p < \infty.$$

Alors la série

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$$

converge presque partout. Sa somme F*, qui est définie presque partout, appartient à* $\mathscr{L}^p(X, \mathscr{M}, \mu)$ *et*

$$\lim_{N\to\infty} \left\| \sum_{n=1}^{N} f_n - F \right\|_p = 0.$$

Démonstration. Posons

$$M = \sum_{n=1}^{\infty} \|f_n\|_p, \qquad G_N(x) = \sum_{n=1}^{N} |f_n(x)|, \qquad G(x) = \sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x)|.$$

D'après l'inégalité de Minkowski,

$$\|G_N\|_p \leq \sum_{n=1}^{N} \|f_n\|_p \leq M,$$

et d'après le théorème de convergence monotone 1.12,

$$\int_X G^p \, d\mu = \lim_{N\to\infty} \int_X G_N^p \, d\mu \leq M^p.$$

Ainsi la fonction G^p est intégrable, donc finie presque partout, et par suite la série

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$$

converge presque partout. Posons

$$F_N(x) = \sum_{n=1}^{N} f_n(x).$$

Puisque

$$|F_N(x)| \leq G(x)$$

pour tout N, on a aussi

$$|F(x)| \leq G(x),$$

la fonction F appartient à $\mathscr{L}^p(X, \mathscr{M}, \mu)$, et d'après le théorème de convergence dominée 1.23, puisque $|F_N - F|^p \leq G^p$,

$$\lim_{N\to\infty} \int_X |F_N - F|^p \, d\mu = 0.$$

$\square$

Théorème 4.6. *(de Riesz-Fischer). Supposons $1 \leq p < \infty$. L'espace $L^p(X\mathscr{M}, \mu)$ est complet. Plus précisément, soit (f_n) une suite de Cauchy de fonctions de $\mathscr{L}^p(X, \mathscr{M}, \mu)$. Alors*

(i) il existe une fonction f de $\mathscr{L}^p(X, \mathscr{M}, \mu)$ telle que

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_p = 0,$$

(ii) il existe une sous-suite (f_{n_k}) telle que

$$\lim_{k\to\infty} f_{n_k}(x) = f(x) \qquad p.p.$$

Démonstration.

D'après le théorème 4.5, toute série normalement convergente de $L^p(X, \mathscr{M}, \mu)$ est convergente. Il en résulte que $L^p(X, \mathscr{M}, \mu)$ est complet. Pour obtenir la conclusion (ii) de l'énoncé, nous allons reprendre la démonstration de ce résultat. On montre d'abord par récurrence qu'il existe une suite croissante d'entiers n_k, $k \geq 1$, telle que

$$\forall \;\; n, m \geq n_k, \quad \|f_n - f_m\|_p \leq \frac{1}{k^2}.$$

Posons

$$u_0 = f_{n_1}, \quad u_k = f_{n_{k+1}} - f_{n_k}.$$

Puisque

$$\|u_k\|_p \leq \frac{1}{k^2},$$

la série $\sum u_k$ est normalement convergente,

$$\sum_{k=0}^{\infty} \|u_k\|_p < \infty.$$

D'après le théorème 4.5, il existe une fonction f de $\mathscr{L}^p(X, \mathscr{M}, \mu)$ telle que

$$\lim_{K\to\infty} \left\| \sum_{k=0}^{K} u_k - f \right\|_p = 0, \qquad \lim_{K\to\infty} \sum_{k=0}^{K} u_k(x) = f(x) \quad \text{p.p.},$$

ce qui se traduit par

$$\lim_{k\to\infty} \|f_{n_k} - f\|_p = 0, \qquad \lim_{k\to\infty} f_{n_k}(x) = f(x) \quad \text{p.p.}.$$

Soit $\varepsilon > 0$. Il existe N tel que

$$\forall\ n, m \geq N, \quad \|f_n - f_m\|_p \leq \varepsilon,$$

et soit k tel que $n_k \geq N$ et $\|f_{n_k} - f\|_p \leq \varepsilon$, alors

$$\forall\ n \geq N, \quad \|f_n - f\|_p \leq \|f_n - f_{n_k}\|_p + \|f_{n_k} - f\|_p \leq 2\varepsilon,$$

donc

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_p = 0.$$

□

Proposition 4.7. *L'espace $L^\infty(X, \mathscr{M}, \mu)$ est complet.*

Démonstration.

Soit (f_n) une suite de Cauchy de l'espace $\mathscr{L}^\infty(X, \mathscr{M}, \mu)$. Les ensembles $E_{n,m}$ définis par

$$E_{n,m} = \{x,\ |f_n(x) - f_m(x)| > \|f_n - f_m\|_\infty\}$$

sont négligeables, et leur réunion E l'est aussi. Sur le complémentaire de E, la suite (f_n) est une suite de Cauchy pour la norme uniforme, donc la suite (f_n) converge sur le complémentaire de E vers une fonction f. Pour $x \in E$, on pose $f(x) = 0$. La fonction ainsi définie f appartient à $\mathscr{L}^\infty(X, \mathscr{M}, \mu)$, et

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_\infty = 0.$$

□

Rappelons qu'une fonction intégrable étagée est une combinaison linéaire de fonctions caractéristiques d'ensembles intégrables. Supposons $1 \leq p < \infty$. Si $f \in \mathscr{L}^p(X, \mathscr{M}, \mu)$, il existe une suite (f_n) de fonctions intégrables étagées qui converge vers f au sens de $\mathscr{L}^p$, c'est à dire que

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_p = 0.$$

En effet, si f est positive, il existe d'après 1.6 une suite (f_n) de fonctions mesurables étagées telle que

$$0 \leq f_n \leq f, \qquad \lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x).$$

Puisque $(f - f_n)^p \leq f^p$, il résulte du théorème de convergence dominée 1.23, que

$$\lim_{n\to\infty} \int_X (f - f_n)^p \, d\mu = 0.$$

Le résultat annoncé s'en déduit, en écrivant une fonction $f \in \mathscr{L}^p$ comme différence de deux fonctions positives de $\mathscr{L}^p$.

On rappelle les hypothèses du théorème 2.5. On a une algèbre de Boole $\mathscr{A}$ de parties de X, et on suppose que $\mathscr{A}$ engendre la tribu $\mathscr{M}$

et μ est une application σ-additive et σ-finie sur $\mathscr{M}$. Les fonctions intégrables élémentaires sont les combinaisons linéaires d'indicatrices d'éléments de $\mathscr{A}$ de mesure finie.

Proposition 4.8. *Sous les hypothèses du théorème 2.5, si* $1 \leq p < \infty$*, pour toute fonction* $f \in \mathscr{L}^p(X, \mathscr{M}, \mu)$*, il existe une suite de fonctions élémentaires intégrables qui converge vers* f *au sens de* $\mathscr{L}^p$*.*

Démonstration. Pour $p = 1$, c'est la dernière partie de l'énoncé du théorème 2.5. La démonstration s'étend au cas $1 \leq p < \infty$, en utilisant la proposition 4.8. □

Exercice 4.1.

1) Soit $(X, \mathscr{M}, \mu)$ un espace mesuré. On suppose que μ est une mesure bornée sur $\mathscr{M}$: $\mu(X) < \infty$. Montrer que si $1 < p < q < \infty$,

$$L^\infty(X, \mathscr{M}, \mu) \subset L^q(X, \mathscr{M}, \mu) \subset L^p(X, \mathscr{M}, \mu) \subset L^1(X, \mathscr{M}, \mu).$$

2) Pour $p \in [1, \infty]$, on désigne par ℓ^p l'espace mesuré

$L^p(\mathbb{N}, \mathscr{P}(\mathbb{N}), \mu)$, où μ est la mesure de comptage sur $\mathbb{N}$: $\mu(\{k\}) = 1$. Montrer que si $1 < p < q < \infty$,

$$\ell^1 \subset \ell^p \subset \ell^q \subset \ell^\infty.$$

Exercice 4.2. Montrer que pour $p < \infty$, ℓ^p est séparable, mais que ℓ^∞ n'est pas séparable.

Exercice 4.3.

1) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $m > 0$ et

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^n &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \left(\frac{1}{\sqrt{1 + \|x\|^2}}\right)^m. \end{aligned}$$

Pour $p \in [1, \infty]$, montrer que $f \in L^p$ si et seulement si $p > \dfrac{n}{m}$.

2) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $m > 0$, $B(0,1)$ la boule unité de $\mathbb{R}^n$, et

$$\begin{aligned} f : B(0,1) &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \frac{1}{\|x\|^m}. \end{aligned}$$

Pour $p \in [1, \infty[$, montrer que $f \in L^p$ si et seulement si $p < \dfrac{n}{m}$

Pour terminer cette section, nous allons énoncer un théorème d'approximation très utile en analyse. Lorsque $X =]\alpha, \beta[$ est un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ ($-\infty \leq \alpha < \beta \leq \infty$), $\mathscr{M} = \mathscr{B}$ est la tribu borélienne de X et $\mu = \lambda$ est la mesure de Lebesgue, nous noterons $\mathscr{L}^p(X)$ et $L^p(X)$ au lieu de $\mathscr{L}^p(X, \mathscr{B}, \lambda)$ et $L^p(X, \mathscr{B}, \lambda)$. On note $\mathscr{C}_c(X)$ l'espace des fonctions continues sur X à support compact contenu dans X. Rappelons que le support d'une fonction f est l'adhérence de l'ensemble des points où cette fonction est non nulle,

$$\mathrm{supp}(f) = \overline{\{x \in \mathbb{R},\ f(x) \neq 0\}}.$$

Théorème 4.9. *Supposons $1 \leq p < \infty$. Soit f une fonction de $\mathscr{L}^p(X)$. Il existe une suite (f_n) de fonctions de $\mathscr{C}_c(X)$ qui converge vers f au sens de $\mathscr{L}^p$.*

Démonstration. Considérons l'ensemble $\mathscr{F}$ des fonctions f de $\mathscr{L}^p(X)$ possédant cette propriété, c'est à dire pour lesquelles il existe une suite (f_n) de fonctions de $\mathscr{C}_c(X)$ qui converge vers f au sens de $\mathscr{L}^p$. Notons que $\mathscr{F}$ est un espace vectoriel, et que, si (f_n) est une suite de fonctions de $\mathscr{F}$ qui converge vers une fonction f au sens de $\mathscr{L}^p$, alors f appartient à $\mathscr{F}$. Nous devons montrer que $\mathscr{F} = \mathscr{L}^p(X)$. Soit f la fonction caractéristique d'un intervalle borné d'extrémités a et b, et soit f_n la fonction trapèze définie comme suit : elle est nulle si $x \leq a - \dfrac{1}{n}$ ou si $x \geq b + \frac{1}{n}$, elle vaut $n(x-a)+1$ si $a - \dfrac{1}{n} \leq x \leq a$, 1 si $a \leq x \leq b$, et $n(b-x)+1$ si $b \leq x \leq b + \dfrac{1}{n}$. La fonction f_n appartient à $\mathscr{C}_c(X)$, et

$$\lim_{n\to\infty} \int_X |f_n - f|^p \, d\lambda = 0.$$

Ceci montre que f appartient à $\mathscr{F}$. Par suite, toute fonction intégrable élémentaire appartient à $\mathscr{F}$, et de ce qui précède (proposition 4.8), il résulte que $\mathscr{F} = \mathscr{L}^p(X)$. □

Corollaire 4.10. *L'ensemble $\mathscr{C}_c^\infty(X)$ des fonctions C^∞ à support compact dans X est dense dans $\mathscr{L}^p$.*

Démonstration. Convolant les f_n de la fin de la preuve avec une fonction g_ε de classe C^∞ positive, à support inclus dans $]-\varepsilon, \varepsilon[$, d'intégrale 1, on obtient le résultat. En effet, les f_n sont uniformément continues à support compact K, les $f_n * g_\varepsilon$ sont C^∞ à support compact K et convergent uniformément vers f_n. Par convergence dominée, elles convergent dans $\mathscr{L}^p$ vers f_n. □

Exercice 4.4. Soit $h_\varepsilon\colon\ \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ la fonction définie par :

$$\begin{cases} h_\varepsilon(x) = & e^{\frac{1}{(x+\varepsilon)(x-\varepsilon)}} & \text{si} \quad -\varepsilon < x < \varepsilon, \\ h_\varepsilon(x) = & 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Montrer que h_ε est C^∞, positive à support compact.

La fonction $g_\varepsilon\colon\ \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ définie par

$$g_\varepsilon(x) = \frac{1}{\int_{\mathbb{R}} h_\varepsilon(y)\,dy} h_\varepsilon(x)$$

répond à la question.

4.3. **L'espace L^2 et les espaces de Hilbert.**

Dans tout ce qui suit, on peut remplacer $\mathbb{C}$ par $\mathbb{R}$, hermitien par euclidien, conjugaison par identité.

4.3.1. *Définitions et premières propriétés.*

soit H un espace vectoriel complexe. Un produit scalaire hermitieb est une application de $H\times H$ dans $\mathbb{C}$, notée $(u,v)\mapsto\langle u,v\rangle$, qui vérifie

(i) $u\neq 0 \Rightarrow \langle u,u\rangle > 0$,

(ii) $\langle u,v\rangle = \overline{\langle v,u\rangle}$,

(iii) $u\mapsto\langle u,v\rangle$ est $\mathbb{C}$-linéaire.

Lorsque (i), (ii) et (iii) sont réalisées, on dit que H muni du produit scalaire $\langle\cdot,\cdot\rangle$ est un espace pré-hilbertien.

Lemme 4.11. *Si $\langle\cdot,\cdot\rangle$ est un produit scalaire, l'application $u\mapsto\|u\| = \langle u,u\rangle^{1/2}$ est une norme, i.e.*

$\cdot$ $u\neq 0\Rightarrow \|u\|>0$,

$\cdot$ $a\in\mathbb{C}, u\in H \Rightarrow \|au\| = |a|\|u\|$ *(homogénéité),*

$\cdot$ $\|u+v\|\leq\|u\|+\|v\|$ *(inégalité triangulaire),*

et on a l'inégalité de Schwarz

$$|\langle u,v\rangle| \leq \|u\|\|v\|.$$

Démonstration. a) Posons $A=\|u\|^2$, $B=|\langle u,v\rangle|$, et $C=\|v\|^2$. Il existe un nombre complexe α tel que $|\alpha|=1$ et $\alpha\langle v,u\rangle = B$. Pour tout réel r, on a alors

$$0\leq\langle u-r\alpha v, u-r\alpha v\rangle = r^2\|v\|^2 - r\alpha\langle v,u\rangle - r\bar{\alpha}\langle u,v\rangle + \|u\|^2.$$

On en déduit

$$Cr^2 - 2Br + A \geq 0$$

pour tout réel r. Le discriminant réduit B^2-AC de ce trinôme du second degré est donc négatif ou nul, ce qui donne l'inégalité de Schwarz.

Par conséquent,

$$\begin{aligned}\|u+v\|^2 =&\|u\|^2 + \langle u,v\rangle + \langle v,u\rangle + \|v\|^2\\ \le&\|u\|^2 + |\langle u,v\rangle| + |\langle v,u\rangle| + \|v\|^2\\ \le&\|u\|^2 + 2\|u\|\|v\| + \|v\|^2\\ =&\left(\|u+v\|\right)^2,\end{aligned}$$

de sorte que $\|\cdot\|$ vérifie l'inégalité triangulaire. L'homogénéité de $\|\cdot\|$ est évidente, ainsi que la condition

· $\|u\| = 0 \Leftrightarrow u = 0$

lorsque (i) est réalisée. □

Définition 4.12. *Un espace de Hilbert est un espace vectoriel muni d'un produit scalaire, et qui muni de la norme associée est un espace complet.*

Exemple 4.1. L'espace $\mathbb{C}^n$ muni du produit scalaire

$$\langle u,v\rangle = \sum_{j=1}^{n} u_j \bar{v}_j$$

est un espace de Hilbert. La norme associée est la norme hermitienne usuelle.

Théorème 4.13. *L'espace $L^2 = L^2(X, \mathscr{M}, \mu)$ est un espace de Hilbert pour le produit scalaire*

$$\langle f,g\rangle = \int_X f\bar{g}\,d\mu,$$

et la norme associée est la norme $\|\cdot\|_2$. En outre, on a l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$\|fg\|_1 \le \|f\|_2\|g\|_2.$$

Démonstration. Comme $|fg| \le f^2 + g^2$, on voit en premier lieu que si $f, g \in L^2$, alors $fg \in L^1$, de sorte que la formule pour le produit scalaire a un sens. Il est immédiat que $\langle\cdot,\cdot\rangle$ vérifie (ii) et (iii), et aussi que $\langle f,f\rangle = \|f\|_2^2$. On a donc (i). On a vu au théorème 4.6 que L^2 est complet, donc c'est un espace de Hilbert. Enfin la dernière inégalité à prouver est l'inégalité de Schwarz appliquée aux fonctions $|f|$ et $|g|$ pour le produit scalaire ci-dessus (c'est aussi un cas particulier de l'inégalité de Hölder). □

Lorsque (f_n) converge dans L^2 vers f, on dit aussi que f_n converge vers f en moyenne quadratique.

Corollaire 4.14. *a) Si* $f_n \to^{L^2} f$ *et* $g_n \to^{L^2} g$*, on a* $f_n g_n \to^{L^1} fg$*.*

b) Si μ *est une mesure finie, on a* $L^2 \subset L^1$ *et l'injection canonique de* L^2 *dans* L^1 *est continue, et on a*

$$f \in L^2 \Rightarrow \|f\|_1 \leq \sqrt{\mu(E)}\|f\|_2. \tag{4.1}$$

Démonstration. a) On a

$$f_n g_n - fg = (f_n - f)g + f(g_n - g) + (f_n - f)(g_n - g),$$

donc

$$\begin{aligned}
&\|f_n g_n - fg\|_1 \\
&\quad \leq \|(f_n - f)g\|_1 + \|f(g_n - g)\|_1 + \|(f_n - f)(g_n - g)\|_1 \\
&\quad \leq \|f_n - f\|_2\|g\|_2 + \|f\|_2\|g_n - g\|_2 + \|f_n - f\|_2\|g_n - g\|_2
\end{aligned}$$

en utilisant l'inégalité de Schwarz. On déduit alors $\|f_n g_n - fg\|_1 \to 0$ des hypothèses.

b) On peut démontrer plus généralement que si $1 \leq p \leq q \leq \infty$, alors $L^q \subset L^p$. Lorsque $q < \infty$, il suffit d'intégrer l'inégalité

$$|f|^p \leq 1 + |f|^q$$

pour obtenir

$$\int_X |f|^p \, d\mu \leq \mu(X) + \int_X |f|^q \, d\mu.$$

Lorsque $q = \infty$, alors

$$|f|^p \leq \|f\|_\infty^p,$$

donc

$$\int_X |f|^p \, d\mu \leq \mu(X)\|f\|_\infty^p.$$

$\square$

Remarque 4.1. Ce résultat est faux si $\mu(X) = \infty$. Si $(X, \mathscr{M}, \mu) = (\mathbb{R}, \mathscr{B}, \lambda)$, la fonction

$$f(x) = x^{-2/3}\mathbb{1}_{[1,\infty[}(x)$$

est dans L^2 mais pas dans L^1.

4.3.2. *Géométrie des espaces de Hilbert.*

Dans ce sous-paragraphe, on considère un espace de Hilbert H muni du produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ et de sa norme associée $\|\cdot\|$. Nous allons donner quelques éléments sur la géométrie de H : il faut bien sûr penser à l'exemple fondamental d'espace de Hilbert complexe $H = \mathbb{C}^n$ (resp. d'espace de Hilbert réel $H = \mathbb{R}^n$) : les principales propriétés de la géométrie hermitienne (resp. euclidienne) se transposent aux espaces de Hilbert sans modification.

Un élément de H sera appelé souvent un vecteur. Rappelons que $u_n \to u$ si $\|u_n - u\| \to 0$. Rappelons aussi que si $u_n \to u$ on a $\|u_n\| \to \|u\|$, c'est à dire que l'application $u \mapsto \|u\|$ de H dans $\mathbb{R}_+$ est continue. Plus généralement, l'application

$$(u, v) \mapsto \langle u, v \rangle$$

de $H \times H$ dans $\mathbb{C}$ est continue (cela se démontre exactement comme à la partie a) du corollaire 4.14).

Commençons par la notion d'orthogonalité.

Définition 4.15. *Deux vecteurs u et v de H sont dits orthogonaux si $\langle u, v \rangle = 0$ (on écrit aussi $u \perp v$). Si K est une partie de H, on appelle orthogonal de K, et on note $K^\perp$ l'ensemble des vecteurs $u \in H$ qui sont orthogonaux à tous les vecteurs de K. Deux parties K et L de H sont dites orthogonales si $K \subset L^\perp$ ($\Leftrightarrow L \subset K^\perp$).*

Le résultat suivant est très intuitif en dimension finie (faire un dessin en dimension 2).

Proposition 4.16. *a) L'orthogonal $K^\perp$ de toute partie K de H est un sous-espace vectoriel fermé de H, et est donc lui-même un espace de Hilbert (fermé signifie que la limite d'une suite quelconque de vecteurs de $K^\perp$ appartient aussi à $K^\perp$).*

b) (Théorème de projection) Si K est une partie convexe fermée de H, et si $u \in H$, il existe un vecteur et un seul, noté $\pi_K(u)$ de K et appelé projection orthogonale de u sur K, qui minimise l'application $v \mapsto \|v - u\|$ sur K. On a $\pi_K(u) = u$ si $u \in K$.

Démonstration. a) Pour tous $u, v \in K^\perp$ et $a \in \mathbb{C}$ on a

$$\langle au, v \rangle = a\langle u, v \rangle = 0$$

et

$$\langle u + v, w \rangle = \langle u, w \rangle + \langle v, w \rangle = 0$$

si $w \in K$. Par suite, au et $u + v$ sont dans $K^\perp$, qui est donc un espace vectoriel. Si $u_n \to u$ et $u_n \in K^\perp$ et $w \in K$ on a

$$\langle u, w \rangle = \lim_n \langle u_n, w \rangle = 0,$$

donc u appartient à $K^\perp$, qui est donc fermé. Enfin la restriction du produit scalaire à $K^\perp$ est encore un produit scalaire, et si $(u_n)_{n\geq 1}$ est une suite de Cauchy dans $K^\perp$, c'est aussi une suite de Cauchy dans H, donc elle converge vers une limite u qui appartient à $K^\perp$ d'après ce qui précède. Cela prouve que $K^\perp$ est aussi un espace de Hilbert.

b) Soit

$$a = \inf_{v\in K} \|v-u\|.$$

Il existe une suite (v_n) dans K telle que $\|v_n - u\| \to a$. Montrons que cette suite est de Cauchy. Il est facile de voir que

$$\|w+w'\|^2 + \|w-w'\|^2 = 2\|w\|^2 + 2\|w'\|^2$$

(identité du parallélogramme). Donc

$$\|v_n + v_m - 2u\|^2 + \|v_n - v_m\|^2 = 2\|v_n - u\|^2 + 2\|v_m - u\|^2.$$

Par ailleurs, la convexité de K implique que $\frac{1}{2}(v_n+v_m) \in K$, donc

$$\|v_n + v_m - 2u\|^2 = 4\left\|\frac{1}{2}(v_n+v_m) - u\right\|^2 \geq 4a^2,$$

par conséquent

$$\|v_n - v_m\|^2 \leq 2\|v_n - u\|^2 + 2\|v_m - u\|^2 - 4a^2.$$

Comme $\|v_n - u\|^2 \to a^2$ on en déduit que $\|v_n - v_m\|^2 \to 0$ lorsque n et m tendent vers ∞. La suite (v_n) est donc de Cauchy, de sorte qu'elle converge vers une limite v qui vérifie

$$\|v-u\| = \lim_n \|v_n - u\| = a,$$

et qui appartient à K puisque K est fermé.

Il reste à montrer l'unicité de v. Si $v' \in K$ vérifie également

$$\|v'-u\| = a,$$

posons $v'_{2n} = v$ et $v'_{2n+1} = v'$. On a

$$\|v'_n - u\| = a$$

pour tout n, donc d'après ce qui précède, la suite (v'_n) est de Cauchy, et elle converge. Comme elle admet les deux points limites v et v', il faut que $v' = v$. Enfin si $u \in K$, il est clair que $v = u$ minimise $v \mapsto \|v-u\|$ sur K. □

Proposition 4.17. *Soit K un sous-espace vectoriel fermé de H.*

a) $\pi_K(u)$ est l'unique vecteur v de K tel que $u - v \in K^\perp$.

b) π_K est une application linéaire continue, contractant la norme (i.e. $\|\pi_K(u)\| \leq \|u\|$). Son image est K et son noyau est $K^\perp$, et on l'appelle l'opérateur projection (orthogonale) sur K.

c) Tout vecteur u de H se décompose de manière unique en une somme $u = v + w$ avec $v \in K$ et $w \in K^\perp$, et on a $v = \pi_K(u)$ et $w = \pi_{K^\perp}(u)$ (donc les sous-espaces K et $K^\perp$ sont supplémentaires dans H).

d) On a $(K^\perp)^\perp = K$.

Démonstration. a) Soit $v = \pi_K(u)$. Pour tout $w \in K$ et tout $a \in \mathbb{C}$ on a $v + aw \in K$, donc

$$\|v + aw - u\|^2 = \|v - u\|^2 + 2\mathscr{R}(a\langle w, v - u\rangle) + |a^2|\|w\|^2 \geq \|v - u\|^2$$

pour tout $a \in \mathbb{C}$. En particulier, choisissant a de la forme $x\alpha$, où $\alpha \in \mathbb{C}$ vérifie $|\alpha| = 1$ et

$$\alpha\langle w, v - u\rangle \in \mathbb{R},$$

on a

$$\|v + x\alpha w - u\|^2 = \|v - u\|^2 + 2x\alpha\langle w, v - u\rangle + x^2\|w\|^2 \geq \|v - u\|^2$$

pour tout $x \in \mathbb{R}$, ce qui n'est possible que si

$$\langle w, v - u\rangle = 0.$$

Cela montre que

$$v - u \in K^\perp.$$

Si $v' \in K$ vérifie aussi $v' - u \in K^\perp$, le vecteur $v - v'$ est à la fois dans K et dans $K^\perp$. Étant orthogonal à lui-même, il est nul par (i).

b) Le fait que π_K soit une application linéaire découle immédiatement de la caractérisation a). Il est clair que l'image de H par π_K est contenue dans K, et comme $\pi_K(u) = u$ si $u \in K$, elle est exactement K. D'après a), on a $\pi_K(u) = 0$ si et seulement si $u \in K^\perp$, donc cet ensemble est le noyau de π_K. Enfin toujours d'après a), on a $u = v + w$ avec $v = \pi_K(u)$ et $w \perp v$, de sorte que

$$\|u\|^2 = \|v\|^2 + \|w\|^2$$

et

$$\|\pi_K(u)\|^2 \leq \|u\|^2.$$

Ainsi, π_K est une contraction, et est donc en particulier continue.

c) On a vu ci-dessus que $u = v + w$ avec $v = \pi_K(u)$ et $w \in K^\perp$. Comme $K^\perp$ est aussi un sous-espace vectoriel fermé, et comme $u - w \in K$ et que tout vecteur de K est orthogonal à $K^\perp$ (propriété évidente), la caractérisation a) pour $\pi_{K^\perp}$ implique que

$$w = \pi_{K^\perp}(u).$$

Si $u = v' + w'$ est une autre décomposition avec $v' \in K$ et $w' \in K^\perp$, par différence $v - v' = w' - w$ est dans $K \cap K^\perp$, et on a déjà vu que cela implique $v - v' = 0$. On a donc achevé la preuve de c).

d) On a déjà vu que $K \subset (K^\perp)^\perp$, et l'inclusion inverse découle de c). En effet, si $u \in (K^\perp)^\perp$, alors x se décompose de manière unique en $u = v + w$ avec $v \in K^\perp$ et $w \in K$, et aussi de manière unique en $u = v' + w'$ avec $v' \in K^\perp$ et $w' \in (K^\perp)^\perp$. Comme $w \in (K^\perp)^\perp$, on a forcément $v = v' = 0$ et $w = w' = u$. □

Soit K une partie de H. L'espace vectoriel engendré par K, et noté $e(K)$, est le plus petit espace vectoriel contenant K (il existe, car d'une part $K \subset H$, d'autre part une intersection quelconque d'espaces vectoriels est un espace vectoriel). Noter que, de manière évidente, $e(K)$ est aussi l'ensemble des combinaisons linéaires finies de vecteurs de K.

La fermeture de $e(K)$ (i.e. l'ensemble des limites des suites convergentes de vecteurs de $e(K)$) est encore clairement un espace vectoriel, appelé l'espace vectoriel fermé engendré par K. Enfin, on dit que K est total dans H si l'espace vectoriel fermé engendré par K est égal à H.

Corollaire 4.18. *Une partie K de H est totale si et seulement si $K^\perp = \{0\}$.*

Démonstration. Soit H' l'espace vectoriel fermé engendré par K. Il est évident que

$$(H')^\perp \subset K^\perp.$$

Montrons que

$$K^\perp \subset (H')^\perp.$$

Si $u \in K^\perp$, alors u est aussi orthogonal à tous les éléments de $e(K)$ (utiliser (iii)) ; si $v \in H'$ il existe des $v_n \in e(K)$ avec $v_n \to v$, et comme $\langle u, v_n\rangle = 0$ pour tout n on a aussi $\langle u, v\rangle = 0$, et par suite $u \in (H')^\perp$. On a donc

$$(H')^\perp = K^\perp.$$

Comme $H' = H$ équivaut à $(H')^\perp = \{0\}$ par c) de la proposition 4.17, on a le résultat. □

Le second sujet important est celui de la dualité. Rappelons que si $(F, \|\cdot\|)$ est un espace vectoriel complexe normé, son dual est l'ensemble F' des applications linéaires

$$\psi : F \to \mathbb{C}$$

telles que

$$|\psi(u)| \leq C\|u\|$$

pour tout $u \in F$, pour une certaine constante $C > 0$ (cette dernière propriété est en fait équivalente à la continuité de ψ). Il est clair que F' est un espace vectoriel, qu'on munit d'une norme $\|\cdot\|'$ définie ainsi :

$$\begin{aligned} \|\psi\|' &= \sup\{|\psi(u)|,\ u \in F,\ \|u\| \leq 1\} \\ &= \sup\left\{\frac{|\psi(u)|}{\|u\|},\ u \in F,\ u \neq 0\right\}. \end{aligned} \tag{4.2}$$

Exercice 4.5. Lorsque $(F, \|\cdot\|)$ est un espace de Banach, il en est de même de $(F', \|\cdot\|')$.

Théorème 4.19. *Soit H un espace de Hilbert. On peut identifier le dual $(H', \|\cdot\|')$ avec $(H, \|\cdot\|)$, en associant à tout vecteur $v \in H$ l'application linéaire ψ_v définie par $\psi_v(u) = \langle u, v\rangle$.*

Démonstration. Si $v \in H$, l'application ψ_v définie ci-dessus est antilinéaire continue et vérifie

$$\|\psi_v\|' \leq \|v\|$$

d'après l'inégalité de Schwarz et (4.2). Comme

$$\psi_v(v) = \langle v, v\rangle = \|v\|^2,$$

4.2 implique que

$$\|\psi_v\|' = \|v\|.$$

Il est clair que l'application

$$v \mapsto \psi_v$$

est antilinéaire. Remarquer aussi que si $\psi_v = 0$, le vecteur v est orthogonal à tout $u \in H$, donc orthogonal en particulier à lui-même, de sorte que $v = 0$.

Il reste à montrer qu'inversement, si $\psi \in H'$, il existe un $v \in H$ tel que $\psi = \psi_v$. Si $\psi = 0$, $v = 0$ répond à la question. Supposons donc que $\psi \neq 0$. Le noyau K de ψ est un sous-espace vectoriel de H, fermé à cause de la continuité de ψ, et $K^\perp$ n'est pas réduit à $\{0\}$ (sinon on aurait $K = H$ d'après le corollaire 4.18, donc $\psi = 0$). Soit alors $w \in K^\perp$, $\|w\| = 1$, de sorte que $\psi(w) \neq 0$. Posons

$$v = \overline{\psi(w)}w.$$

Pour tout $u \in H$, on pose

$$u' = u - \frac{\psi(u)}{\psi(w)}w.$$

On a $\psi(u') = 0$, donc $u' \in K$, donc $\langle u', v\rangle = 0$ et

$$\begin{aligned}\langle u', v\rangle =& \langle u, v\rangle - \frac{\psi(u)}{\psi(w)}\langle w, v\rangle\\ =& \langle u, v\rangle - \frac{\psi(u)}{\psi(w)}\psi(w)\langle w, w\rangle\\ =& \langle u, v\rangle - \psi(u)\end{aligned}$$

est donc nul. Par suite,

$$\psi(u) = \langle u, v\rangle = \psi_v(u).$$

En conclusion, l'application

$$v \mapsto \psi_v$$

est un isomorphisme antilinéaire isométrique de H dans H'. □

Remarque 4.2. Dans le cas réel, l'application $v \mapsto \psi_v$ est linéaire.

Le troisième sujet important est celui des bases orthonormales. Commençons par une définition.

Définition 4.20. *Un système orthonormal est une famille $(u_i)_{i\in I}$ de vecteurs de l'espace de Hilbert H qui vérifie*

$$\langle u_i, u_j\rangle = 0 \quad \textit{si} \quad i \neq j \quad \textit{et} \quad \langle u_i, u_i\rangle = 1.$$

Une base orthonormale est un système orthonormal total dans H.

D'après le corollaire 4.18, un système orthonormal $(u_i)_{i\in I}$ est une base si et seulement si

$$\Big(\langle v, u_i\rangle = 0 \quad \text{pour tout} \quad i \in I\Big) \Rightarrow v = 0. \tag{4.3}$$

Attention, une base orthonormale n'est par une base algébrique au sens où tout vecteur serait une combinaison linéaire finie de vecteurs de la base, sauf bien sûr si H est de dimension finie.

Soit $(u_i)_{1\leq i\leq d}$ un système orthonormal fini, et K l'espace vectoriel fermé qu'il engendre. L'ensemble K contient évidemment l'ensemble des combinaisons linéaires finies

$$u = \sum_{i=1}^{d} a_i u_i \qquad (a_i \in \mathbb{C})$$

et, comme ce dernier ensemble est à l'évidence fermé, il est en fait égal à K. Noter que si

$$u = \sum_{i=1}^{d} a_i u_i \qquad \text{et} \qquad v = \sum_{i=1}^{d} b_i u_i$$

alors

$$\langle u, v\rangle = \sum_{1\le i,j\le d} a_i b_j \langle u_i, v_j\rangle = \sum_{i=1}^{d} a_i\overline{b_i}.$$

Ainsi, K peut être identifié à l'espace $\mathbb{C}^d$ muni de la norme hermitienne, par la correspondace

$$u \leftrightarrow (a_i)_{1\le i\le d}.$$

Ceci se généralise de la façon suivante.

Proposition 4.21. *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un système orthonormal dénombrable, et K l'espace vectoriel fermé engendré par ce système.*

a) K est isomorphe, en tant qu'espace de Hilbert, à l'espace ℓ^2 des suites complexes

$$a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \qquad \textit{telles que} \qquad \sum_n |a_n|^2 < \infty.$$

Plus précisément, si $a = (a_n)$ est dans ℓ^2, la série $\sum_n a_n u_n$ converge dans H et définit un vecteur $u(a)$ de K ; l'application $a \mapsto u(a)$ est linéaire bijective de ℓ^2 dans K et préserve le produit scalaire (donc la norme, donc elle est continue ainsi que son inverse) :

$$\left\langle \sum_n a_n u_n, \sum_n b_n u_n \right\rangle = \sum_n a_n\overline{b_n}. \tag{4.4}$$

b) Si $u \in H$ et $a_n = \langle u, u_n\rangle$, alors $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ appartient à ℓ^2 et on a

$$\sum_n a_n u_n = \pi_K(u),$$

et en particulier

$$\sum_n \langle u, u_n\rangle^2 \le \|u\|^2, \tag{4.5}$$

avec égalité si et seulement si $u \in K$.

Commençons par un lemme qui a un intérêt propre.

Lemme 4.22. *Si $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de vecteurs deux à deux orthogonaux, la série $\sum_n v_n$ converge dans H si et seulement si*

$$\sum_n \|v_n\|^2 < \infty,$$

et on a alors

$$\left\| \sum_n v_n \right\|^2 = \sum_n \|v_n\|^2. \tag{4.6}$$

Démonstration. Soit $w_n = \sum_{i=1}^n v_i$ et $S_n = \sum_{i=0}^n \|v_i\|^2$. Si $n < m$, on a

$$\begin{aligned}
\|w_m - w_n\|^2 &= \left\langle \sum_{i=n+1}^{m} v_i, \sum_{i=n+1}^{m} v_i \right\rangle \\
&= \sum_{n<i,j\leq m} \langle v_i, v_j\rangle \\
&= \sum_{i=n+1}^{m} \|v_i\|^2 \\
&= S_m - S_n,
\end{aligned}$$

puisque $\langle v_i, v_j\rangle = 0$ si $i \neq j$. La suite (w_m) converge dans H si et seulement si elle est de Cauchy, donc d'après ce qui précède si et seulement si la suite $(S_n)_n$ est de Cauchy dans $\mathbb{R}$, donc si et seulement si

$$\sum_i \|v_i\|^2 < \infty.$$

Enfin sous ces conditions, on note w la limite de la suite (w_n). Exactement comme ci-dessus, on a

$$||w_n\|^2 = S_n,$$

et en passant à la limite on obtient 4.6. $\square$

Démonstration. de la proposition 4.21.

a) Soit $a = (a_n) \in \ell^2$. Comme $\|a_n u_n\| = |a_n|$, le lemme 4.22 entraîne que la série $\sum_n a_n u_n$ converge, et on note $u(a)$ sa somme. Il est clair que $u(a) \in K$ puisque K est fermé, et que $a \mapsto u(a)$ est linéaire. De plus, l'égalité 4.6 implique

$$\|u(a)\| = \|a\|_2^2$$

(le produit scalaire et la norme dans ℓ^2 étant notés respectivement $\langle \cdot, \cdot\rangle_2$ et $\|\cdot\|_2$). On a

$$\mathscr{R}\left(\langle u, v\rangle\right) = \frac{1}{4}\left(\|u+v\|^2 + \|u-v\|^2\right),$$

$$\mathscr{I}\left(\langle u, v\rangle\right) = \frac{1}{4}\left(\|u+iv\|^2 + \|u-iv\|^2\right),$$

et une relation analogue entre $\langle \cdot, \cdot\rangle_2$ et $\|\cdot\|_2$. Par conséquent, l'application linéaire $a \mapsto u(a)$, qui préserve la norme, préserve aussi le produit scalaire, et on a (4.4). Enfin, l'image K' de ℓ^2 est un espace vectoriel contenant les u_n et contenu dans K ; si $v_n \in K'$ et $v_n \to v$ alors (v_n) est une suite de Cauchy dans H, donc les inverses $u^{-1}(v_n)$ forment une suite de Cauchy dans ℓ^2, convergeant donc vers une limite a, et évidemment $v = u(a)$. ainsi, K' est fermé, donc $K' = K$ et $u(\cdot)$ est bijective de ℓ^2 dans K.

b) Soit $u \in H$ et $v = \pi_K(u)$. Il existe $a = (a_n) \in \ell^2$ avec $v = \sum_n a_n u_n$ et $\|a\|_2 = \|v\|$. Si $v_n = \sum_{i=0}^n a_i u_i$, on a

$$\langle v_n, u_m \rangle = a_m \quad \text{si} \quad n \geq m,$$

et comme $v_n \to v$, on en déduit que

$$a_m = \langle v, u_m \rangle = \langle u, u_m \rangle \quad \text{pour tout} \quad m,$$

car $u - v$ est orthogonal à u_m. Pour terminer, il suffit de remarquer que

$$\|u\|^2 = \|v\|^2 + \|v - u\|^2$$

(théorème de Pythagore), donc $\|u\| \geq \|v\|$, avec égalité si et seulement si $u = v$, donc si et seulement si $u \in K$. $\square$

Revenons pour terminer à l'espace $L^2 = L^2(X, \mathscr{M}, \mu)$. On peut énoncer le théorème 4.19 dans ce cadre, ce qui donne

Théorème 4.23. *L'espace L^2 est son propre dual, ce qui revient à dire qu'à toute application linéaire continue ψ de L^2 dans $\mathbb{C}$ on peut associer une fonction $g \in L^2$ telle que*

$$\psi(f) = \int_X f \bar{g} \, d\mu \quad \textit{pour toute} \quad f \in L^2.$$

On a aussi le théorème suivant, que nous énonçons sans démonstration.

Théorème 4.24. *Si μ est une mesure σ-finie sur*

$$(X, \mathscr{M}) = (\mathbb{R}^d, \mathscr{B}(\mathbb{R}^d)),$$

alors l'espace L^2 admet une base orthonormale dénombrable.

Exercice 4.6. Un exemple de base orthonormale.

Soit $(X, \mathscr{M}, \mu) = ([0,1], \mathscr{B}([0,1]), \lambda)$. Montrer que la suite de fonctions ci-dessous constitue une base orthonormale de L^2. On l'appelle la base de Haar.

$$f_n(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } k2^{-n} \leq x < (k+1)2^{-n} \quad \text{pour un } k \text{ impair} \\ -1 & \text{si } k2^{-n} \leq x < (k+1)2^{-n} \quad \text{pour un } k \text{ pair.} \end{cases}$$

4.4. **Convolution et espaces L^p.**

Considérons d'abord l'action des translations sur les fonctions. Rappelons que $\tau_a f$ désigne la translatée de la fonction f par le nombre réel a,

$$(\tau_a f)(x) = f(x-a).$$

Si $f \in \mathscr{L}^p(\mathbb{R})$, $1 \leq p \leq \infty$, alors $\tau_a f$ aussi et

$$\|\tau_a f\|_p = \|f\|_p.$$

C'est en effet une conséquence immédiate de l'invariance par translation de la mesure de Lebesgue.

Proposition 4.25. *Supposons* $1 \leq p < \infty$*. Si* $f \in \mathscr{L}^p(\mathbb{R})$*, alors*

$$\lim_{a\to 0} \|\tau_a f - f\|_p = 0.$$

Cette propriété n'a pas lieu pour $p = \infty$. En effet, si f est la fonction caractéristique d'un intervalle d'extrémités α et β ($-\infty \leq \alpha \leq \beta \leq \infty$), alors

$$\forall\ a \neq 0,\ \|\tau_a f - f\|_\infty = 1.$$

Démonstration. Supposons d'abord que f soit la fonction caractéristique d'un intervalle borné. Si $|a|$ est inférieur à la longueur de l'intervalle,

$$\|\tau_a f - f\|_p = (2|a|)^{\frac{1}{p}},$$

donc

$$\lim_{a\to 0} \|\tau_a f - f\|_p = 0.$$

Par suite la propriété a lieu si f est une fonction intégrable en escalier. Soit f une fonction de $\mathscr{L}^p(\mathbb{R})$ et soit $\varepsilon > 0$. Il existe une fonction intégrable en escalier g telle que

$$\|f - g\|_p = \frac{\varepsilon}{3}.$$

D'après ce qui précède, il existe $\eta > 0$ tel que si $|a| \leq \eta$,

$$\|\tau_a g - g\|_p \leq \frac{\varepsilon}{3}.$$

Finallement, pour $|a| \leq \eta$,

$$\begin{aligned}\|\tau_a f - f\|_p \leq & \|\tau_a f - \tau_a g\|_p + \|\tau_a g - g\|_p + \|g - f\|_p \\ \leq & \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.\end{aligned}$$

□

Théorème 4.26. *Soient f et g deux fonctions de $\mathscr{L}^1(\mathbb{R})$. Pour presque tout x, l'application*

$$y \mapsto f(x-y)g(y)$$

est intégrable. la fonction $f * g$ qui est définie presque partout par

$$f * g(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x-y)g(y)\,dy$$

est intégrable, et

$$\|f * g\|_1 \leq \|f\|_1 \|g\|_1.$$

La loi de composition interne ainsi définie sur l'espace de Banach $L^1(\mathbb{R})$ en fait une algèbre de Banach commutative.

Rappelons qu'une algèbre normée A (sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) est une algèbre munie d'une norme d'espace vectoriel vérifiant de plus l'inégalité

$$\|ab\| \leq \|a\|\|b\|,$$

pour tous $a, b \in A$, et qu'une algèbre de Banach est une algèbre normée complète.

Démonstration. a) D'après le théorème de Fubini-Tonelli 3.5,

$$\int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} |f(x-y)||g(y)|\,dx \right) dy = \|f\|_1 \int_{\mathbb{R}} |g(y)|\,dy = \|f\|_1 \|g\|_1.$$

donc l'application $(x,y) \mapsto f(x-y)g(y)$ est intégrable sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$. D'après le théorème de Fubini 3.4, pour presque tout x la fonction est intégrable sur $\mathbb{R}$. De plus,

$$|f * g(x)| \leq \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} |f(x-y)||g(y)|\,dx \right) dy,$$

donc

$$\|f * g\|_1 \leq \|f\|_1 \|g\|_1.$$

b) Montrons que le produit de convolution est associatif. Si f, g, h sont trois fonctions de $\mathscr{L}^1(\mathbb{R})$,

$$\begin{aligned} (f * (g * h))\,(x) &= \int_{\mathbb{R}} f(x-y)(g * h)(y)\,dy \\ &= \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f(x-y)g(y-z)h(z)\,dz \right) dy. \end{aligned}$$

Or, pour presque tout x,

$$\int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} |f(x-y)||g(y-z)||h(z)|\,dydz < \infty,$$

donc, d'après le théorème de Fubini, pour un tel x,

$$(f*(g*h))(x) = \int_{\mathbb{R}} (f*g)(x-z)g(z)\,dz = ((f*g)*h)(x).$$

Donc les fonctions $(f*(g*h))$ et $((f*g)*h)$ sont égales presque partout. $\square$

Théorème 4.27. *Soient f une fonction de $\mathscr{L}^1(\mathbb{R})$ et g une fonction de $\mathscr{L}^p(\mathbb{R})$, $1 \leq p < \infty$. Pour presque tout x, la fonction*

$$y \mapsto f(y)g(x-y)$$

est intégrable, et la fonction $f*g$, définie pour presque tout x par

$$f*g(x) = \int_{\mathbb{R}} f(y)g(x-y)\,dy$$

appartient à $\mathscr{L}^p(\mathbb{R})$. De plus,

$$\|f*g\|_p \leq \|f\|_1 \|g\|_p.$$

Démonstration. Le cas $p = 1$ a déjà été traité. Supposons $p > 1$ et soit q l'exposant conjugué : $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$. Soit φ la fonction caractéristique d'un intervalle borné $[a, b]$. D'après le théorème de Fubini-Tonelli 3.5, et l'inégalité de Hölder,

$$\begin{aligned}&\int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} |f(y)||g(x-y)|\varphi(x)\,dydx \\ &= \int_{\mathbb{R}} |f(y)| \left(\int_{\mathbb{R}} |g(x-y)|\varphi(x)\,dx \right) dy \leq \|f\|_1 \|g\|_p (b-a)^{\frac{1}{q}}.\end{aligned}$$

Donc, d'après le théorème de Fubini, pour presque tout x, la fonction $y \mapsto f(y)g(x-y)$ est intégrable et l'application

$$x \mapsto \varphi(x) \int_{\mathbb{R}} f(y)g(x-y)\,dy$$

est intégrable. Par suite la fonction $f*g$, qui est définie presque partout, est mesurable.

D'après l'inégalité de Hölder,

$$\begin{aligned}&\int_{\mathbb{R}} |f(y)|^{\frac{1}{p}} |g(x-y)||f(y)|^{\frac{1}{q}}\,dy \\ &\leq \left(\int_{\mathbb{R}} |f(y)||g(x-y)|^p\,dy \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{\mathbb{R}} |f(y)|\,dy \right)^{\frac{1}{q}}.\end{aligned}$$

Après une intégration en x, nous déduisons que

$$\int_{\mathbb{R}} |f*g|^p\,dx \leq \|g\|_p^p \|f\|_1^{1+\frac{p}{q}},$$

c'est à dire

$$\|f * g\|_p \leq \|f\|_1 \|g\|_p.$$

□

On note $\mathscr{C}_0(\mathbb{R})$ l'espace des fonctions continues sur $\mathbb{R}$ à valeurs complexes qui tendent vers 0 à l'infini. Muni de la norme uniforme

$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x)|,$$

c'est un espace de Banach.

Théorème 4.28. *Soient f une fonction de $\mathscr{L}^1(\mathbb{R})$ et g une fonction de $\mathscr{C}_0(\mathbb{R})$. La fonctionf $* g$ appartient à $\mathscr{C}_0(\mathbb{R})$ et*

$$\|f * g\|_\infty \leq \|f\|_1 \|g\|_\infty.$$

Démonstration. La fonction g, étant continue et tendant vers 0 à l'infini, est uniformément continue : pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\eta > 0$ tel que si $|x - x'| \leq \eta$, alors $|f(x) - f(x')| \leq \varepsilon$. Par suite, si $|x - x'| \leq \eta$,

$$|f * g(x) - f * g(x')| \leq \int_{\mathbb{R}} |f(y)||g(x-y) - g(x'-y)|\, dy \leq \varepsilon \|f\|_1.$$

La fonction $f * g$ est donc uniformément continue. D'autre part, on montre, à l'aide du théorème de convergence dominée, que la fonction $f * g$ tend vers 0 à l'infini. □

Si f et g sont deux fonctions de $\mathscr{L}^2(\mathbb{R})$, alors, pour tout x, la fonction

$$y \mapsto f(x-y)g(y)$$

est intégrable. Le produit de convolution $f * g$ est donc défini en tout point. C'est vrai plus généralement si f appartient à $\mathscr{L}^p(\mathbb{R})$ et g à $\mathscr{L}^q(\mathbb{R})$, lorsque p est q sont deux exposants conjugués.

Théorème 4.29. *Soient f et g deux fonctions de $\mathscr{L}^2(\mathbb{R})$. La fonction $f * g$ appartient à $\mathscr{C}_0(\mathbb{R})$ et*

$$\|f * g\|_\infty \leq f\|_2 \|g\|_2.$$

Démonstration. a) Supposons d'abord que f et g sont les fonctions caractéristiques de deux intervalles bornés. la fonction $f * g$ est alors une fonction continue à support compact dont le graphe a la forme d'un trapèze ou d'un triangle. par suite, si f et g sont deux fonctions intégrables en escalier, la fonction $f * g$ est continue à support compact.

b) Soient f et g deux fonctions de $\mathscr{L}^2(\mathbb{R})$, et soient (f_n) et (g_n) deux suites de fonctions intégrables en escalier telles que

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_2 = 0, \quad \lim_{n\to\infty} \|g_n - g\|_2 = 0.$$

En écrivant

$$f_n * g_n - f * g = f_n * (g_n - g) + (f_n - f) * g,$$

nous obtenons pour tout x, à l'aide de l'inégalité de Schwarz,

$$|f_n * g_n(x) - f * g(x)| \leq \|f_n\|_2 \|g_n - g\|_2 + \|f_n - f\|_2 \|g\|_2.$$

La suite $f_n * g_n$ converge donc uniformément vers $f * g$. Il en résulte que $f * g$ est continue et tend vers 0 à l'infini. □

4.4.1. *Approximation de l'identité et régularisation.*

Soit A une algèbre normée commutative. Une approximation de l'identité est une suite (a_n) d'éléments de A telle que, pour tout élément b de A,

$$\lim_{n\to\infty} a_n \cdot b = b.$$

Nous allons considérer le cas où A est l'algèbre de convolution $L^1(\mathbb{R})$. Soit φ une fonction intégrable positive d'intégrale 1. Posons

$$\varphi_n(x) = n\varphi(nx).$$

Théorème 4.30. *La suite (φ_n) est une approximation de l'identité de $L^1(\mathbb{R})$. Plus généralement, si f est une fonction de $\mathscr{L}^p(\mathbb{R})$, $1 \leq p < \infty$,*

$$\lim_{n\to\infty} \|\varphi_n * f - f\|_p = 0$$

Lemme 4.31. *Si g est une fonction mesurable bornée sur $\mathbb{R}$, continue en 0,*

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} \varphi_n(x) g(x)\, dx = g(0).$$

Démonstration. Notons d'abord que, pour tout $\eta > 0$,

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-\eta}^{\eta} \varphi_n(x)\, dx = \lim_{n\to\infty} \int_{-n\eta}^{n\eta} \varphi(x)\, dx = 1,$$

et donc

$$\lim_{n\to\infty} \int_{|x|>\eta} \varphi_n(x)\, dx = 0.$$

Soit $\varepsilon > 0$. La fonction g étant continue en 0, il existe $\eta > 0$ tel que, si $|x| \leq \eta$,

$$|g(x) - g(0)| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Ainsi, pour $|x| \leq \eta$,

$$\left| \int_{\mathbb{R}} \varphi_n(x) g(x)\, dx - g(0) \right| \leq \int_{\mathbb{R}} \varphi_n(x) |g(x) - g(0)|\, dx$$
$$\leq \frac{\varepsilon}{2} + 2 \sup |g| \int_{|x|>\eta} \varphi_n(x)\, dx.$$

Il existe N tel que, si $n \geq N$,

$$2 \sup |g| \int_{|x|>\eta} \varphi_n(x)\, dx \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Le résultat annoncé est établi. □

Démonstration. du théorème 4.30.

Soit f une fonction de $\mathscr{L}^p(\mathbb{R})$. Posons

$$g(y) = \int_{\mathbb{R}} |f(x-y) - f(x)|^p\, dx = \|\tau_y f - f\|_p^p.$$

La fonction g est bornée et continue en 0,

$$g(y) \leq 2^p \|f\|_p^p, \quad \text{et} \quad \lim_{y \to 0} g(y) = 0,$$

d'après 4.25. Pour presque tout x,

$$\varphi_n * f(x) - f(x) = \int_{\mathbb{R}} \varphi_n(y) \left(f(x-y) - f(x)\right)\, dy.$$

Nous allons montrer que, pour un tel x,

$$|\varphi_n * f(x) - f(x)|^p \leq \int_{\mathbb{R}} \varphi_n(y) |f(x-y) - f(x)|^p\, dy.$$

Si $p = 1$, c'est évident. Si $p > 1$, notons q l'exposant conjugué de p. En écrivant

$$|\varphi_n * f(x) - f(x)| \leq \int_{\mathbb{R}} \varphi_n(y)^{\frac{1}{q}} \varphi_n(y)^{\frac{1}{p}} |f(x-y) - f(x)|\, dy,$$

nous obtenons grâce à l'inégalité de Hölder 4.2

$$|\varphi_n * f(x) - f(x)| \leq \left(\int_{\mathbb{R}} \varphi_n(y) |f(x-y) - f(x)|^p\, dy \right)^{\frac{1}{p}} \times 1$$

en utilisant $1 = \left(\int_{\mathbb{R}} \left(\varphi_n(y)^{\frac{1}{q}} \right)^q \right)^{\frac{1}{q}}$, et après une intégration en x,

$$\int_{\mathbb{R}} |\varphi_n * f(x) - f(x)|^p\, dx \leq \int_{\mathbb{R}} \varphi_n(y) g(y)\, dy.$$

Le résultat annoncé est une conséquence du lemme 4.31. □

La démonstration de la proposition suivante est laissée au lecteur ;

Proposition 4.32. *Si f est une fonction de $\mathscr{C}_0(\mathbb{R})$, alors*

$$\lim_{n\to\infty} \|\varphi_n * f - f\|_\infty = 0.$$

Citons deux approximations de l'identité qui jouent un rôle important en analyse :

Exemple 4.2. *Approximation de Gauss.*

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2}, \qquad \varphi_n(x) = \frac{n}{\sqrt{\pi}} e^{-n^2x^2}$$

Exemple 4.3. *Approximation de Poisson.*

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{1+x^2}, \qquad \varphi_n(x) = \frac{n}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{1+n^2x^2}.$$

Nous allons étudier la dérivée d'un produit de convolution et montrer, à l'aide de la convolution, que, pour $1 \leq p < \infty$, toute fonction de $\mathscr{L}^p(\mathbb{R})$ est limite, au sens de $\mathscr{L}^p(\mathbb{R})$, d'une suite de fonction de classe C^∞.

Proposition 4.33. *Soient f une fonction de $\mathscr{L}^p(\mathbb{R})$, et φ une fonction de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ à support compact. Alors $f * \varphi$ est de classe C^1, et*

$$(f * \varphi)' = f * \varphi'.$$

Démonstration. Le support de φ étant compact, il existe $A > 0$ tel que

$$\operatorname{supp}(\varphi) \subset [-A, A].$$

Nous allons appliquer le théorème de dérivation d'une intégrale dépendant d'un paramètre 1.27 à l'intégrale

$$f * \varphi(x) = \int_{\mathbb{R}} f(y)\varphi(x-y)\, dy.$$

Fixons $K = [a, b]$. Pour $x \in K$, $y \in \mathbb{R}$,

$$|f(y)\varphi'(x-y)| \leq g_K(y),$$

avec

$$g_K(y) = \sup |\varphi'||f(y)|\mathbb{1}_{[a-A,b+A]}(y).$$

La fonction g_K est intégrable et nous pouvons appliquer le théorème 1.27 :

$$(f * \varphi)'(x) = \int_{\mathbb{R}} f(y)\varphi'(x-y)\, dy = f * \varphi'(x)$$

□

On note $\mathscr{D}(\mathbb{R})$ l'espace des fonctions de classe C^∞ à support compact. Notons que l'espace $\mathscr{D}(\mathbb{R})$ n'est pas réduit à la fonction nulle. Il contient en effet la fonction ψ définie par

$$\psi(x) = \begin{cases} \exp\left(-\frac{1}{1-x^2}\right) & \text{si} \quad -1 < x < 1, \\ 0 & \text{si} \quad |x| \geq 1. \end{cases}$$

Corollaire 4.34. *Soient f une fonction de $\mathscr{L}^p(\mathbb{R})$ et φ une fonction de $\mathscr{D}(\mathbb{R})$. Alors la fonction $f * \varphi$ est de classe C^∞ et*

$$(f * \varphi)^{(n)} = f * \varphi^{(n)}.$$

On dit que $f * \varphi$ est la régularisée de f par φ.

On termine par un résultat de densité important.

Théorème 4.35. *Si $1 \leq p < \infty$, toute fonction f de $\mathscr{L}^p(\mathbb{R})$ est limite, au sens de $\mathscr{L}^p(\mathbb{R})$, d'une suite de fonctions de $\mathscr{D}(\mathbb{R})$.*

Démonstration. Soit φ une fonction de $\mathscr{D}(\mathbb{R})$, positive, d'intégrale égale à 1. On peut prendre par exemple

$$\varphi(x) = \frac{1}{A}\psi(x),$$

où ψ est la fonction décrite ci-dessus et

$$A = \int_{\mathbb{R}} \psi(x)\, dx.$$

Posons $\varphi_n(x) = n\varphi(nx)$. Si f est une fonction de $\mathscr{L}^p(\mathbb{R})$ à support compact, la fonction $\varphi_n * f$ appartient à $\mathscr{D}(\mathbb{R})$ et, d'après le théorème 4.25,

$$\lim_{n\to\infty} \|\varphi_n * f - f\|_p = 0.$$

Le résultat annoncé s'en déduit, car toute fonction de $\mathscr{L}^p(\mathbb{R})$ est limite, au sens de $\mathscr{L}^p(\mathbb{R})$, d'une suite de fonctions en escalier (donc à support compact). □

Références

[1] J. Faraut, *Calcul intégral*, Belin, 2000.

[2] E. H. Laamri, *Mesures, intégration, convolution, et transformée de Fourier des fonctions. Rappels de cours et exercices corrigés*, Dunod, 2001.

[3] W. Rudin, *Analyse réelle et complexe*, Masson, 1975.