

# CPBx - Compléments de cours

Frédéric Castet

Septembre 2025

## Composantes de l'accélération dans le repère de Frenet

La description d'un mouvement circulaire tel que celui d'un satellite autour d'un astre (ou celui, si l'on considère le modèle planétaire, de l'électron autour du noyau), est plus aisée si on utilise le repère de Frenet dont l'origine est centrée sur l'objet en mouvement. Il est défini par deux vecteurs unitaires  $\vec{\tau}$  et  $\vec{n}$ , respectivement tangent et normal à l'orbite ( $||\vec{\tau}'|| = ||\vec{n}'|| = 1$ ). Ces deux vecteurs forment une base orthonormale directe, appelée base de Frenet, représentée en vert sur le schéma ci-dessous.

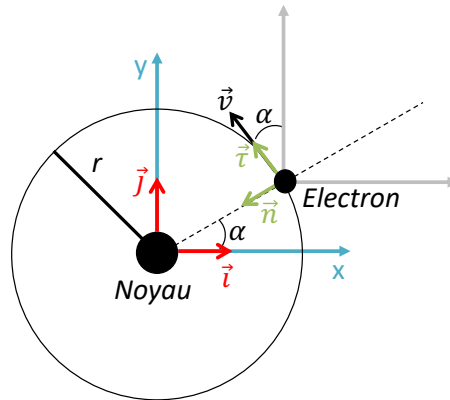


Figure 1: Modèle planétaire de l'atome d'hydrogène avec la représentation de la base de Frenet

Dans ce repère mobile, l'accélération de l'objet s'exprime:

$$\vec{a} = \frac{dv}{dt} \vec{\tau} + \frac{v^2}{r} \vec{n} \quad (1)$$

où  $v$  est la vitesse du satellite et  $r$  le rayon de l'orbite. Nous démontrons ci-dessous l'expression 1.

Par définition, le vecteur accélération est la dérivée du vecteur vitesse par rapport au temps :

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} \quad (2)$$

Le vecteur vitesse est tangent à l'orbite du satellite, soit  $\vec{v} = v\vec{\tau}$ . On peut donc écrire :

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d(v\vec{\tau})}{dt} \quad (3)$$

Le vecteur  $\vec{\tau}$  tourne avec le satellite, il dépend donc aussi du temps. Il faut donc dériver le produit  $v\vec{\tau}$  (rappelez-vous la dérivée du produit de deux fonctions:  $(uv)' = u'v + uv'$ ):

$$\vec{a} = \frac{dv}{dt}\vec{\tau} + v\frac{d\vec{\tau}}{dt} \quad (4)$$

Il faut donc déterminer l'expression de la dérivée de  $\vec{\tau}$  par rapport au temps. Pour cela, nous allons exprimer le vecteur  $\vec{\tau}$  dans un repère fixe, le repère  $(\vec{i}, \vec{j})$ . Avec un peu de trigonométrie, on peut déterminer l'expression des vecteurs  $\vec{\tau}$  et  $\vec{n}$  de la base de Frenet en fonction de  $\vec{i}$  et  $\vec{j}$ , et de l'angle  $\alpha$  repérant la position du satellite sur l'orbite:

$$\begin{aligned} \vec{\tau} &= -\sin(\alpha)\vec{i} + \cos(\alpha)\vec{j} \\ \vec{n} &= -\cos(\alpha)\vec{i} - \sin(\alpha)\vec{j} \end{aligned} \quad (5)$$

En utilisant l'expression de  $\vec{\tau}$  ci-dessus, on peut déterminer sa dérivée. Attention, il ne faut pas oublier que l'angle  $\alpha$  dépend du temps. Pour dériver le sinus par exemple, on utilise la règle  $(\sin f)' = \cos(f) \times f'$ . On obtient donc:

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{\tau}}{dt} &= -\cos(\alpha)\frac{d\alpha}{dt}\vec{i} - \sin(\alpha)\frac{d\alpha}{dt}\vec{j} \\ &= \left(-\cos(\alpha)\vec{i} - \sin(\alpha)\vec{j}\right)\frac{d\alpha}{dt} \end{aligned} \quad (6)$$

D'après l'équation 5, le terme entre parenthèse est égal au vecteur  $\vec{n}$ . On a donc:

$$\frac{d\vec{\tau}}{dt} = \frac{d\alpha}{dt}\vec{n} \quad (7)$$

En reportant dans l'équation 4, on obtient:

$$\vec{a} = \frac{dv}{dt}\vec{\tau} + v\frac{d\alpha}{dt}\vec{n} \quad (8)$$

Dernière étape, il nous faut déterminer la dérivée de l'angle  $\alpha$  en fonction du temps. Cette dérivée est appelée vitesse angulaire (ou vitesse de rotation). Elle

est généralement notée  $\omega$ .<sup>1</sup>

$$\omega = \frac{d\alpha}{dt} \quad (9)$$

On a donc:

$$\vec{a} = \frac{dv}{dt}\vec{\tau} + v\omega\vec{n} \quad (10)$$

Par ailleurs, dans un mouvement circulaire, la vitesse angulaire  $\omega$  est liée à la vitesse linéaire  $v$  par la relation suivante:

$$v = \omega r \quad (11)$$

En reportant dans l'équation 10, on obtient finalement:

$$\vec{a} = \frac{dv}{dt}\vec{\tau} + \frac{v^2}{r}\vec{n} \quad (12)$$

---

<sup>1</sup>On peut noter que la dimension de la vitesse angulaire est l'inverse d'un temps (l'angle  $\alpha$  n'ayant pas de dimension). On trouve donc que la vitesse angulaire est l'analogue de la pulsation pour une onde. Et c'est normal: *La pulsation d'un phénomène périodique est la valeur de la vitesse angulaire qu'aurait un système en rotation de même fréquence : pour une fréquence  $\nu$ , la pulsation est donc  $\omega = 2\pi\nu$ .*