Parcours : Master 1 **Cours :** L^p,Convolution, Fourier **Code :** 4TMA711U

TD 2 : Complément sur la théorie de Lebesgue

Exercice 1. Soit X un ensemble. On rappelle la définition du cours d'une classe monotone $\mathscr{M}$ sur X : $\mathscr{M}$ est un ensemble de parties de X vérifiant $\mathscr{M}$ contient $\varnothing$ et X, $\mathscr{M}$ est stable par différence propre, $\mathscr{M}$ est stable par réunion dénombrable croissante. Montrer qu'il existe des classes monotones qui ne soient pas des σ-algèbres.

(Indication : considérer deux joueurs lançant une pièce de monaie. On observe le côté de chaque pièce : pile ou façe. On note X l'ensemble des observations. Appeler μ la probabilté sur X dans le cas où les lancés sont indépendants. Appeler ν la probabilité dans le cas où les deux lancés sont identiques : deux fois pile, ou deux fois face. Appeler $\mathscr{M} = \{A \subset X : \mu(A) = \nu(A)\}$. Conclure.)

Trouver d'autres exemples.

Exercice 2. Soit X un ensemble. On définit une autre notion de classe monotone. Un ensemble $\mathscr{M}$ de parties de X est appelé classe monotone si $\mathscr{M}$ contient $\varnothing$ et X, $\mathscr{M}$ est stable par réunion dénombrable croissante, $\mathscr{M}$ est stable par intersection dénombrable décroissante.

Soient $\mathscr{A}$ une algèbre (de Boole) de X, (contient $\varnothing$ et X, stable par réunion et intersection finies). Soit $\mathscr{M}$ une classe monotone au sens précédent. Montrer alors le résultat

$$\mathscr{A} \subset \mathscr{M} \;\Rightarrow\; \sigma(\mathscr{A}) \subset \mathscr{M}.$$

On rapelle que $\sigma(\mathscr{A})$ est la σ-algèbre engendrée par $\mathscr{A}$.

Exercice 3. Soit (X, d) une espace métrique et $\mu : \mathscr{B}_X \to [0, +\infty[\cup \{+\infty\}$ une mesure (σ-additive) définie sur les boréliens $\mathscr{B}_X$. On rappelle une définition du cours (vue cependant pour les mesures de probabilité). La mesure μ est dite régulière si pour tout $B \in \mathscr{B}_X$, pour tout $\epsilon > 0$, il existe un fermé F et un ouvert U, tels que

$$F \subset B \subset U, \quad \text{et} \quad \mu(U \backslash F) < \epsilon.$$

1. Montrer que la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$ est régulière.
2. Plus généralement, montrer que s'il exists une suite de fermés $(F_n)_{n \geqslant 0}$ tels que $X = \cup_{n \geqslant 0}$ et $\mu(F_n) < +\infty$ pour tout $n \geqslant 0$, alors μ est rgulière.
3. Construire une mesure sur $\mathbb{R}$ qui n'est pas régulière.

Exercice 4. Soit (X, d) un espace polonais (métrique, séparable, complet). Soit $F \subset X$ une partie de X totalement borné (ou précompact), c'est-à-dire vérifiant : pour tout $\epsilon > 0$ il existe un recouvrement fini de F par des boules de rayon ϵ (pas forcément centrées sur F). Montrer alors que $\bar{F}$ est compact.

Exercice 5. Montrer que $X = \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, muni de la topologie produit, est polonais. (On retiendra que tout espace polonais est homéomorphe à une partie borélienne de X. Réciproquement, toute partie borélienne de X admet une métrique redonnant la même topologie et le rendant polonais. Les démonstrations sont difficiles.)

Exercice 6. Soit (X, d) un espace polonais et $\mu : \mathscr{B}_X \to [0,1]$ une mesure de probabilité définie sur les boréliens $\mathscr{B}_X$ de X. Montrer que μ est fortement régulière au sens suivant : pour tout $B \in \mathscr{B}_X$, pour tout $\epsilon > 0$, il existe un compact K et un ouvert U, tels que

$$K \subset B \subset U, \quad \text{et} \quad \mu(U \backslash K) < \epsilon.$$

Indication : Utiliser la régularité des mesures de probabilité dans un espace métrique ; utiliser l'exercice précédent.

Exercice 7. On a vu en cours que, pour un espace métrique quelconque (X, d), pour une mesure de probabilité $\mu : \mathscr{B}_X \to [0,1]$, $C_b^0(X, \mathbb{R})$ (l'ensemble des fonctions continues bornées) est dense dans $L^1(X, \mathbb{R}, \mu)$.

1. On suppose que $X = \mathbb{R}^d$. Montrer que $C_c^0(X, \mathbb{R})$ (l'ensemble des fonctions continues à support compact) est dense dans $L^1(X, \mathbb{R}, \mathrm{Leb})$, où Leb est la mesure de Lebesque.
2. On suppose que $X = \mathbb{R}^d$. Montrer qu'il existe une mesure μ (σ-additive) sur $\mathbb{R}^d$ telle que $C_c^0(X, \mathbb{R})$ n'est pas dense dans $L^1(X, \mathbb{R}, \mu)$.
3. On suppose que $X = \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$. Déterminer $C_c^0(X, \mathbb{R})$. Mettre en évidence un paradoxe concernant .

Exercice 8. Soient μ et ν deux mesures (σ-additive) sur $\mathbb{R}^+$ telles qu'il existe $p_0 \in \mathbb{R}$ tel que

$$\forall\, p \geqslant p_0, \ \int_0^{+\infty} e^{-px}\, \mu(dx) = \int_0^{+\infty} e^{-px}\, \nu(dx) < +\infty.$$

On cherche à montrer que $\mu = \nu$.

1. Enoncer le théorème de Stone-Weierstrass de densité des algèbres de fonctions continues sur les espaces compacts X. On rapelle qu'une algèbre de fonctions continues est un sous espace vectoriel de $C_b^0(X, \mathbb{R})$ stable par multiplication.
2. On suppose ici que μ et ν sont des mesures de probabilité et que $p_0 = 0$. Montrer alors que $\mu = \nu$.
3. Conclure dans le cas général où p_0 est quelconque et μ et ν sont seulement σ-additives.
4. On note

$$\mathscr{E}_{p_0} := \Big\{ f :]0, +\infty[\to \mathbb{R} : f \text{ est mesurable et } \int_0^{+\infty} e^{-p_0 x} |f(x)|\, dx < +\infty \Big\} / \sim,$$

quotienté par la relation d'équivalence $f \sim g \iff \mathrm{Leb}(\{f \neq g\}) = 0$. On appelle transformée de Laplace de $f \in \mathscr{E}_{p_0}$, notée $\mathscr{L}[f]$, la fonction

$$\forall\, f \in \mathscr{E}_{p_0}, \ \forall\, p \geqslant p_0, \ \mathscr{L}[f](p) = \int_0^{+\infty} e^{-px} f(x)\, dx.$$

Montrer que le transformée de Laplace est injective.