

TD3 – Espaces L^p

Exercice 1 Soit $(\Omega, \mathcal{B}, \mu)$ un espace mesuré. Montrer que pour tout $f \in L^p$, il existe $C > 0$ tel que

$$\forall \lambda > 0, \mu(\{|f| \geq \lambda\}) \leq C\lambda^{-p}$$

Exercice 2 Soit $(\Omega, \mathcal{B}, \mu)$ un espace mesuré.

1. Montrer que pour tout $1 \leq p \leq q \leq \infty$, on a $L^p \cap L^\infty \subset L^q$.
2. Soient $1 < p < +\infty$ et $f \in L^p \cap L^\infty$, montrer que $\lim_{q \rightarrow +\infty} \|f\|_q = \|f\|_\infty$.

Exercice 3 Soit $p \in [1, \infty]$. Soit $(\Omega, \mathcal{B}, \mu)$ un espace mesuré. Soit $A \in \mathcal{B}$. On considère

$$F = \{f \in L^p(E, \mathcal{B}, \mu), f = 0 \text{ } \mu \text{ p.p. sur } A\}.$$

Montrer que F est un fermé de $L^p(\Omega, \mathcal{B}, \mu)$.

Exercice 4 Soit $(\Omega, \mathcal{B}, \mu)$ un espace mesuré et soient $1 \leq p, q, r < \infty$.

1. On suppose que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r}$. Montrer que pour tout $f \in L^p$ et $g \in L^q$, on a $fg \in L^r$ et

$$\|fg\|_r \leq \|f\|_p \|g\|_q. \quad (1)$$

2. On suppose que $\Omega = \mathbb{R}$ et pour tout $\lambda > 0$ on note $f_\lambda(x) = f(\lambda x)$.

- (a) Exprimer $\|f_\lambda\|_p$ en fonction de λ et $\|f\|_p$
- (b) Montrer que si $p, q, r \geq 1$ sont tels que (1) est satisfaite, alors $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r}$.

Exercice 5 Soit $(\Omega, \mathcal{B}, \mu)$ un espace mesuré et soient $1 \leq p_1, \dots, p_n \leq \infty$ tels que $\sum_{i=1}^n \frac{1}{p_i} = 1$. On suppose que pour tout $i = 1, \dots, n$, $f_i \in L^{p_i}$. Montrer que $f := \prod_{i=1}^n f_{p_i}$ est intégrable et que

$$\|f\|_1 \leq \prod_{i=1}^n \|f_i\|_{p_i}.$$

Exercice 6 Soit $p \in [1, \infty)$. On considère le sous ensemble C de $L^p(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ défini par :

$$C = \{f \in L^p(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda), f \geq 0 \text{ p.p.}\}.$$

Montrer que C est d'intérieur vide. Qu'en est-il pour $p = +\infty$?

Exercice 7 (Lemme de Riemann-Lebesgue). Soit f une fonction intégrable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. Montrer que

$$\int_I f(t) e^{i\lambda t} dt \xrightarrow{\lambda \rightarrow +\infty} 0.$$

Indication : On pourra utiliser un argument de densité.

Exercice 8 Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ un espace mesuré et soit f une fonction mesurable sur Ω . On suppose que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $f_n \in L^\infty$ et $g_n \in L^1$ telles que $f = f_n + g_n$ et $\|f_n\|_\infty \leq 1$, $\|g_n\|_1 \leq \frac{1}{n}$. Montrer que $f \in L^\infty$ et que $\|f\|_\infty \leq 1$.

Exercice 9 Soit $J : \ell^1(\mathbb{N}) \rightarrow \ell^\infty(\mathbb{N})'$ l'application linéaire définie par $J(u)(v) = \sum_{n \in \mathbb{N}} u_n v_n$ pour tout $u \in \ell^1, v \in \ell^\infty$.

1. Montrer que J est linéaire continue et injective
2. On considère l'espace c_0 des suites admettant une limite en $+\infty$. Montrer que c_0 est un sous espace fermé de ℓ^∞
3. On considère $\varphi : c_0 \rightarrow \mathbb{C}$ définie par $\varphi(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n$. Montrer que φ est continue.
4. On admet que φ se prolonge en une forme linéaire continue sur ℓ^∞ . Montrer que J n'est pas surjective.

Exercice 10 1. Soit $1 \leq p < \infty$. Montrer que $\ell^p(\mathbb{N})$ est séparable
2. Montrer que $\ell^\infty(\mathbb{N})$ n'est pas séparable

Exercice 11 Soit $1 < p \leq 2$, soit p' son exposant conjugué à $(\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1)$ et soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^d$ muni de la mesure de Lebesgue. On considère l'application $J : L^{p'}(\Omega) \rightarrow L^p(\Omega)'$ définie par

$$J(f)(g) = \int_{\Omega} f g$$

pour tout $f \in L^{p'}, g \in L^p$. Le but de cet exercice est de montrer que J est une isométrie surjective.

1. Montrer que J est linéaire continue et que $\|J\| \leq 1$.
2. Pour tout $f \in L^{p'}$, montrer que $g := |f|^{p'-2} \bar{f}$ appartient à L^p . En déduire que $\|J(f)\|_{(L^p)'} = \|f\|_{p'}$.
3. On suppose que $p = 2$. Démontrer que J est surjective dans ce cas.
4. On suppose désormais que $1 < p < 2$ et on se donne $\varphi \in (L^p)'$.
(a) On suppose que $\mu(\Omega)$ est fini
 - i. Rappeler pourquoi il existe $C > 0$ tel que $\|f\|_p \leq C \|f\|_2$ pour tout $f \in L^2$. On notera $\mathbf{i}$ l'injection continue de L^2 dans L^p .
 - ii. Montrer qu'il existe $g \in L^2$ telle que $\varphi(\mathbf{i}(f)) = \int_{\Omega} f g$ pour tout $f \in L^2$
 - iii. On considère la suite de fonctions $f_n = \bar{g} |g|^{p'-2} 1_{\{|g| \leq n\}}$. Montrer que $f_n \in L^2$ pour tout n et en calculant $\varphi(f_n)$, montrer que

$$\int_{\Omega} |g|^{p'} 1_{\{|g| \leq n\}} \leq \|\varphi\|_{L^p \rightarrow \mathbb{C}}^{p'}$$

- iv. Montrer que $g \in L^{p'}$ et conclure.
- (b) On s'intéresse maintenant au cas où Ω n'est pas nécessairement de mesure finie. On note $r = \frac{2p}{2-p}$.
 - i. Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $A_n = \{x \in \Omega, n \leq |x| < n+1\}$. Montrer qu'on peut choisir des nombres $\alpha_n > 0$ tels que $w := \sum_{n \in \mathbb{N}} \alpha_n 1_{A_n}$ appartienne à $L^r(\Omega)$
 - ii. Montrer que l'application $\psi(f) = \varphi(fw)$ définit une forme linéaire sur L^2 .
 - iii. Montrer qu'il existe $G \in L^2$ telle que pour tout $f \in L^p$ telle que $\frac{f}{w} \in L^2$, on a $\varphi(f) = \int f \frac{G}{w}$
 - iv. Montrer que $g = \frac{G}{w} \in L^{p'}$ et terminer la preuve.

Exercice 12 Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ un espace mesuré et $p \in [1, +\infty]$. On se donne une suite (f_n) de fonctions de $L^p(\mu)$ et on suppose qu'il existe $f \in L^p(\mu)$ telle que $f_n \rightarrow f$ μ -pp et $\|f_n\|_p \rightarrow \|f\|_p$.

1. En utilisant la convexité de la fonction $t \mapsto |t|^p$, montrer que la fonction $\varphi_n = 2^{p-1}(|f_n|^p + |f|^p) - |f - f_n|^p$ vérifie

$$\varphi_n \geq 0, \quad \mu - pp.$$

2. En appliquant le Lemme de Fatou à φ_n , montrer que $f_n \rightarrow f$ dans L^p .