

Exercice 1:

On munit $\mathbb{N}$ de la topologie discrète (induite par la topologie métrique usuelle sur $\mathbb{R}$) et on munit $X = \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ de la topologie produit, qui est la moins fine à rendre les projections $\pi_i: \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \rightarrow \mathbb{N}$, $\pi_i(\underline{x}) = x_i$, continues.

Nous avons vu en TD que la topologie produit est induite par la distance $d: X^2 \rightarrow [0, +\infty[$ définie par:

$$d(\underline{x}, \underline{y}) = \begin{cases} 0 & \text{si } \underline{x} = \underline{y} \\ \frac{1}{2^k} & \text{où } k = \min \{n \geq 0: x_n \neq y_n\}. \end{cases}$$

Les compacts de $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ sont d'intérieur vide.

preuve: Soit $K \subset \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ un compact

Puisque les seuls compacts de $\mathbb{N}$ sont les ensembles finis, on a que pour tout $n \in \mathbb{N}$ $\pi_n(K) \subset \mathbb{N}$ est un ensemble fini.

Supposons par l'absurde que $K^\circ \neq \emptyset$. Alors il existe

$\underline{x} \in K$ et $\varepsilon > 0$ tq. $B(\underline{x}, \varepsilon) \subset K^\circ \subset K$. Il existe

donc $k \geq 0$ tq. $0 < \frac{1}{2^k} < \varepsilon$ et $B(\underline{x}, \frac{1}{2^k}) \subset B(\underline{x}, \varepsilon) \subset K^\circ \subset K$.

Or $B(\underline{x}, \frac{1}{2^k}) = \{ \underline{y} \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}: y_0 = x_0, \dots, y_{k-1} = x_{k-1} \}$

et donc $\pi_k(B(\underline{x}, \frac{1}{2^k})) = \mathbb{N} \subset \pi_k(K)$ qui est fini ∇

Soit $f \in C_c^\circ(\mathbb{N}^{\mathbb{N}}, \mathbb{R})$. Alors $\exists K \subset \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ compact tq.

$f^{-1}(\mathbb{R}^*) \subset K$. Or $\mathbb{R}^*$ est ouvert dans $\mathbb{R}$ et f

est continue, donc $f^{-1}(\mathbb{R}^*) \subset K^\circ = \emptyset$

Donc f est identiquement nulle et $C_c^0(\mathbb{N}^N; \mathbb{R}) = \{0\}$

Soit μ une mesure de probabilité sur $(X, \mathcal{B}_X)$.

Alors $\mathbb{1}_X \in L^1(X, \mu, \mathbb{R})$ car mesurable puisqu'indicatrice d'un borélien et $\int_X \mathbb{1}_X d\mu = \mu(X) = 1 < +\infty$.

Or $\{0\}$ est un fermé de $L^1(X, \mu, \mathbb{R})$ donc $\overline{\{0\}} = \{0\}$

et $[\mathbb{1}_X] \notin \{0\}$ car $\|0\|_1 = 0$ et $\|[\mathbb{1}_X]\|_1 = 1$

Donc $C_c^0(X, \mathbb{R})$ n'est pas dense dans $L^1(X, \mu, \mathbb{R})$.

Exercice 2.

(1) Théorème de Stone-Weierstrass:

Soit X un espace topologique compact.

Une sous-algèbre $\mathcal{A}$ de $C^0(X, \mathbb{R})$ est dense

si et seulement si:

elle sépare les points (i.e. $\forall x, y \in X, x \neq y, \exists f \in \mathcal{A} \text{ t.q. } f(x) \neq f(y)$)
et pour tout point de X il existe une fonction de $\mathcal{A}$ qui ne s'annule pas en ce point.

(2) Il suffit de montrer que

$$\forall \varphi \in C_c^0([0, +\infty[), \int_{\mathbb{R}^+} \varphi d\mu = \int_{\mathbb{R}^+} \varphi d\nu.$$

Soit donc $\varphi \in C_c^0([0, +\infty[)$. Alors $\exists R > 0$ t.q.

$\forall x > R \quad \varphi(x) = 0$ (i.e. $\text{supp}(\varphi) \subset [0, R]$).

Soit $X_{\mathbb{R}} = [0, R]$. $X_{\mathbb{R}}$ est un espace topologique compact. Notons $e_p : [0, R] \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction $e_p(x) = e^{-px}$, pour $p \in \mathbb{R}$ et considérons l'algèbre $A_{\mathbb{R}}$ engendrée par $\{e_p, p \geq 0\}$.

Cette algèbre sépare les points car $e_1(x) = e^{-x}$ est injective et de plus e_1 ne s'annule jamais.

Donc $A_{\mathbb{R}}$ est dense dans $C^0(X_{\mathbb{R}}, \mathbb{R})$ par le théorème de Stone-Weierstrass.

Donc $\forall \varepsilon > 0 \exists s \in A_{\mathbb{R}}$ tq $\|\varphi|_{[0, R]} - s\|_{\infty} < \frac{\varepsilon}{2}$

$s \in A_{\mathbb{R}}$ donc elle est de la forme $s = \sum_{j=1}^n a_j e_{p_j}$ avec $a_j \in \mathbb{R}$ et $p_j \geq 0$.

De plus par hypothèse $\int_{X_{\mathbb{R}}} e_p d\mu = \int_{X_{\mathbb{R}}} e_p d\nu \quad \forall p \geq 0$
et donc $\int_0^R s d\mu = \int_0^R s d\nu$.

On a alors :

$$\begin{aligned} \left| \int_{\mathbb{R}^+} \varphi d\mu - \int_{\mathbb{R}^+} \varphi d\nu \right| &= \left| \int_{X_{\mathbb{R}}} \varphi d\mu - \int_{X_{\mathbb{R}}} \varphi d\nu \right| \\ &= \left| \int_{X_{\mathbb{R}}} (\varphi - s) d\mu - \int_{X_{\mathbb{R}}} (\varphi - s) d\nu \right| \\ &\leq \left| \int_{X_{\mathbb{R}}} (\varphi - s) d\mu \right| + \left| \int_{X_{\mathbb{R}}} (\varphi - s) d\nu \right| \\ &\leq \int_{X_{\mathbb{R}}} |\varphi - s| d\mu + \int_{X_{\mathbb{R}}} |\varphi - s| d\nu \\ &\leq \int_{X_{\mathbb{R}}} \|\varphi - s\|_{\infty} d\mu + \int_{X_{\mathbb{R}}} \|\varphi - s\|_{\infty} d\nu \\ &\leq \|\varphi - s\|_{\infty} (\mu(\mathbb{R}) + \nu(\mathbb{R})) < \frac{\varepsilon}{2} \cdot 2 = \varepsilon \end{aligned}$$

Donc $\forall \varepsilon > 0 \quad \left| \int_{\mathbb{R}^+} \varphi d\mu - \int_{\mathbb{R}^+} \varphi d\nu \right| < \varepsilon$ et donc

$$\int_{\mathbb{R}^+} \varphi d\mu = \int_{\mathbb{R}^+} \varphi d\nu \quad \forall \varphi \in C_c^\circ([0, +\infty[)$$

ce qui implique $\mu = \nu$.

(3) Dans le cas général. Considérons :

$$\tilde{\mu} : \mathcal{B}_{\mathbb{R}^+} \rightarrow [0, 1] \quad \text{et} \quad \tilde{\nu} : \mathcal{B}_{\mathbb{R}^+} \rightarrow [0, 1]$$

$$\text{définies par } \tilde{\mu}(A) \doteq \frac{1}{\lambda} \int_A e^{-p_0 x} d\mu(x) \quad \forall A \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}^+}$$

$$\tilde{\nu}(A) \doteq \frac{1}{\lambda} \int_A e^{-p_0 x} d\nu(x) \quad \forall A \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}^+}$$

$$\text{où } \lambda \doteq \int_0^{+\infty} e^{-p_0 x} d\mu(x) = \int_0^{+\infty} e^{-p_0 x} d\nu(x) < +\infty$$

$\tilde{\mu}$ et $\tilde{\nu}$ sont deux mesures des probabilités qui vérifient les hypothèses du point (2) car $\forall q \geq 0$

$$\int_{\mathbb{R}^+} e^{-qx} d\tilde{\mu}(x) = \frac{1}{\lambda} \int_{\mathbb{R}^+} e^{-(q+p_0)x} d\mu(x)$$

$$= \frac{1}{\lambda} \int_{\mathbb{R}^+} e^{-(q+p_0)x} d\nu(x) = \int_{\mathbb{R}^+} e^{-qx} d\tilde{\nu}(x).$$

Donc $\tilde{\mu} = \tilde{\nu}$.

Or, pour tout $\varphi \in C_c^\circ(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$ on peut écrire

$$\varphi(x) = \lambda \varphi(x) \cdot e^{p_0 x} \cdot \frac{e^{-p_0 x}}{\lambda} = \varphi(x) \frac{e^{-p_0 x}}{\lambda} \quad \text{et } \varphi \in C_c^\circ(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$$

Donc $\forall \varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^+} \varphi(x) d\mu(x) &= \int_{\mathbb{R}^+} \varphi(x) \frac{e^{-p_0 x}}{1} d\mu(x) \\ &= \int_{\mathbb{R}^+} \varphi(x) d\tilde{\mu}(x) \\ &= \int_{\mathbb{R}^+} \varphi(x) d\tilde{\nu}(x) \\ &= \int_{\mathbb{R}^+} \varphi(x) \frac{e^{-p_0 x}}{1} d\nu(x) = \int_{\mathbb{R}^+} \varphi(x) d\nu(x)\end{aligned}$$

ce qui implique $\mu = \nu$.

(4) La transformée de Laplace est une application linéaire
donc pour montrer son injectivité il suffit de calculer
son noyau.

Soit $f \in \mathcal{E}_{p_0}$ tq. $\mathcal{L}[f] = 0$. Alors $\forall p \geq p_0$ $\int_0^{+\infty} f(x) e^{-px} dx = 0$
Posons $f^+ \doteq \max(f, 0) \geq 0$ et $f^- = \max(-f, 0) \geq 0$. On a $f = f^+ - f^-$

Il s'agit de deux fonctions mesurables sur $\mathbb{R}^+$.

De plus $|f^+| \leq |f|$ et $|f^-| \leq |f|$, donc $f^+, f^- \in \mathcal{E}_{p_0}$

Considérons donc les deux mesures μ^+ et μ^- définies

par $\mu^+(A) \doteq \int_A f^+(x) dx$, $\mu^-(A) \doteq \int_A f^-(x) dx$ $\forall A \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}^+}$

μ^+ et μ^- sont deux mesures σ -additives et $\forall p \geq p_0$

$$\begin{aligned}0 &= \int_0^{+\infty} e^{-px} d\mu^+(x) - \int_0^{+\infty} e^{-px} d\mu^-(x) = \int_0^{+\infty} f^+ e^{-px} dx - \int_0^{+\infty} f^- e^{-px} dx \\ &= \int_0^{+\infty} (f^+ - f^-) e^{-px} dx \\ &= \mathcal{L}[f](p) = 0\end{aligned}$$

donc μ^+ et μ^- vérifient les hypothèses du point (3)
et donc $\mu^+ = \mu^-$ i.e. $\forall A \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}^+} \int_A f^+ d\mu = \int_A f^- d\mu$

en particulier on a

$$\int_{\{f \geq 0\}} f^+ d\mu = \int_{\{f \geq 0\}} f^- d\mu = 0 \Rightarrow f^+(x) = 0 \text{ presque partout}$$

et

$$\int_{\{f \leq 0\}} f^+ d\mu = \int_{\{f \leq 0\}} f^- d\mu = 0 \Rightarrow f^-(x) = 0 \text{ presque partout}$$

ce qui entraîne $f \in [0]$ et montre que $\mathcal{L}$ est injective.
