Question de Cours :

Soit $1 \leq p < +\infty$ et $f \in L^p(\mathbb{R}_+^*)$. Alors il existe une suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{C}_c^0(\mathbb{R}_+^*)$ telle que

$$\lim_{n\to+\infty} \|f-f_n\|_p = 0$$

preuve (grandes lignes) :

On rappelle que la mesure de Lebesgue est σ-finie et finie sur les compacts.

Soit $f \in L^p(\mathbb{R}_+^*)$. Quitte à écrire $f = Re(f) + i Im(f)$, on peut supposer f à valeurs dans $\mathbb{R}$. Quitte à écrire $f = f^+ - f^-$, on peut supposer $f \geq 0$.

On montre d'abord que les fonctions simples, i.e, de la forme $g = \sum_{k=0}^{n} a_k \mathbb{1}_{A_k}$ (avec $A_k \subset (0,N)$ $N>0$) sont denses dans $L^p(\mathbb{R}_+^*)$.

Il suffit donc d'approcher les indicatrices par des éléments de $\mathcal{C}_c^0(\mathbb{R}_+^*)$ – Pour ce faire on utilise la régularité de la mesure de Lebesgue :

$\forall$ A borélien, $\forall \varepsilon>0$ $\exists$ U ouvert et $\exists$ F fermé tels que

$$F \subset A \subset U \quad \text{et} \quad Leb(U \setminus F) < \varepsilon$$

Soit φ continue sur $\mathbb{R}_+^*$ telle que $\mathbb{1}_F \leq \varphi \leq \mathbb{1}_U$. Alors

$$\int_{\mathbb{R}_+^*} |\mathbb{1}_A - \varphi|^p dLeb \leq \int_{\mathbb{R}_+^*} |\mathbb{1}_U - \mathbb{1}_F|^p dLeb = \int_{\mathbb{R}_+^*} |\mathbb{1}_U - \mathbb{1}_F| dLeb = Leb(U\setminus F) < \varepsilon$$

Soit $\varphi_R(x) \doteq \varphi(x)\left(1 - \min\left(1, \frac{d(x,0)}{R}\right)\right)$

Alors $\varphi_R \in C^0_c(\mathbb{R}^*_+)$ et φ_R croît vers φ simplement, donc dans $L^p(\mathbb{R}^*_+)$ grâce au théorème de convergence dominée. $\square$

Exercice 1 :

Soient $1 \leq p < q < +\infty$.

① Comparer $L^p([0,1])$ et $L^q([0,1])$

On a $L^q([0,1]) \subset L^p([0,1])$. En fait, pour tout $f \in L^q([0,1])$, on a $|f(t)|^p \leq |f(t)|^q + 1$ pour Leb-presque tout $t \in [0,1]$

Donc $\|f\|_p^p = \int_{[0,1]} |f|^p d\mathrm{Leb} \leq \int_{[0,1]} (1+|f|^q)\, d\mathrm{Leb} = \|f\|_q^q + 1 < +\infty$

L'inclusion est stricte : par exemple $f(t) = t^{-1/q} \in L^p([0,1])$

car $\int_{[0,1]} |t|^{-p/q} dt = \left[\frac{t^{1-p/q}}{1-p/q}\right]_0^1 = \frac{q}{q-p} < +\infty$

mais $t^{-1/q} \notin L^q([0,1])$.

② Montrer que, pour tout $p \geq 1$, $L^p(\mathbb{R}) \subset L^1_{loc}(\mathbb{R})$.

Soit $p \geq 1$ et soit q son exposant conjugué, i.e., t.q. $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$

Pour tout $R > 0$, $\mathbb{1}_{[-R,R]} \in L^q(\mathbb{R})$

(si $q = +\infty$, $\|\mathbb{1}_{[-R,R]}\|_\infty = 1 < +\infty$, si $q < \infty$ $\|\mathbb{1}_{[-R,R]}\|_q = (2R)^{1/q} < \infty$)

Grâce à l'inégalité d'Hölder, $\forall f \in L^p(\mathbb{R})$ on a donc

$$\|\mathbb{1}_{[-R,R]} f\|_1 \leq \|f\|_p \cdot \|\mathbb{1}_{[-R,R]}\|_q < +\infty$$

et donc $\mathbb{1}_{[-R,R]} f \in L^1(\mathbb{R})$ pour tout $R > 0$, i.e. $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$

Ceci montre que $\forall p \geq 1$, $L^p(\mathbb{R}) \subset L^1_{loc}(\mathbb{R})$.

③ Soit $f \in L^p(\mathbb{R})$. Déterminer $\|\delta_\alpha f\|_p$, où $\delta_\alpha f(t) \doteq f(\alpha t)$ et $\alpha > 0$, en fonction de $\|f\|_p$.

Soit $f \in L^p(\mathbb{R})$ et soit $\alpha > 0$. On a:

$$\|\delta_\alpha f\|_p^p = \int_{\mathbb{R}} |f(\alpha t)|^p dt \underset{u=\alpha t}{=} \frac{1}{\alpha}\int_{\mathbb{R}} |f(u)|^p du = \frac{1}{\alpha}\|f\|_p^p$$

Donc $\|\delta_\alpha f\|_p = \alpha^{-\frac{1}{p}}\|f\|_p$

Exercice 2 :

Pour $n \geq 1$ on définit $f_n : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ par $f_n(t) = t^{-1/2} e^{-t^n}$

① Montrer qu'il existe un plus grand $p^* > 1$ tel que $\forall n \geq 1$ et $\forall p \in [1, p^*[$, $f_n \in L^p(\mathbb{R}_+^*)$.

Soit $p \geq 1$. On a $|f_n(t)|^p = t^{-p/2} e^{-pt^n} = \frac{1}{t^{p/2} e^{pt^n}}$

Or $|f_n(t)|^p = O(e^{-pt^n})$ pour $t \to +\infty$, et e^{-pt^n} est intégrable à l'infini pour tout $p \geq 1$.

D'autre part, $|f_n(t)|^p \sim t^{-p/2}$ pour $t \to 0$, et $t^{-p/2}$ est intégrable en zéro seulement si $p < 2$.

Pour $n \geq 1$, $\exists \tilde{C} > 0$, $\forall t \in]0, \frac{1}{2}]$ $|f_n(t)|^2 > \frac{\tilde{C}}{t} \notin L^1(]0, 1/2])$

Donc $f_n \notin L^2(\mathbb{R}_+^*)$.

Pour $1 \leq p < 2$ on a : $\forall n \geq 1$ $\exists C > 0$ tq.

$$\int_{\mathbb{R}_+^*} |f_n(t)|^p dt = \int_{]0,1]} |f_n(t)|^p dt + \int_{]1,+\infty[} |f_n(t)|^p dt$$

$$\leq C\left(\int_{]0,1]} t^{-p/2} dt + \int_{]1,+\infty[} e^{-pt^n} dt\right) < +\infty$$

Donc $p^* = 2$ et $\forall\, p \in [1,2[$ on a $f_n \in L^p(\mathbb{R}_+^*)$.

$\square$

② Pour tout $t_0 > 0$, montrer que la suite numérique $(f_n(t_0))_{n\geq 1}$ converge vers une limite finie $f(t_0)$.

Soit $t_0 > 0$.

Si $t_0 > 1$, alors $f_n(t_0) = t_0^{-1/2} e^{-t_0^n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

Si $t_0 = 1$, alors $f_n(1) = e^{-1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} e^{-1}$

Si $0 < t_0 < 1$, alors $f_n(t_0) = t_0^{-1/2} e^{-t_0^n} \longrightarrow t_0^{-1/2}$.

③ Montrer que pour tout $p < p^*$, $(f_n)_{n\geq 1}$ converge vers f dans $L^p(\mathbb{R}_+^*)$

D'après le point ②, pour tout $t_0 > 0$, $(f_n(t_0))_n$ converge simplement vers $f(t_0)$:

$$f(t_0) = \begin{cases} t_0^{-1/2} & \text{si } 0 < t_0 < 1 \\ e^{-1} & \text{si } t_0 = 1 \\ 0 & \text{si } t_0 > 1. \end{cases}$$

D'après le point ①, $\forall n \geq 1$ $\forall\, 1 \leq p < p^*$, $f_n \in L^p(\mathbb{R}_+^*)$

De plus $\forall n \geq 1$, $\forall t \in \mathbb{R}_+^*$ on a que la fonction $g(t) = t^{-1/2}\, \mathbb{1}_{]0,1[} + t^{-1/2} e^{-t}\, \mathbb{1}_{[1,+\infty[}$ domine f_n et $g \in L^p(\mathbb{R}_+^*)$ $\forall\, 1 \leq p < 2$.

Par le théorème de convergence dominée dans L^p on a donc que $(f_n)_{n\geq 1}$ converge vers f dans $L^p(\mathbb{R}_+^*)$.

$\square$

④ La série $\sum_{n\geq 1} f_n$ converge-t-elle dans $L^p(\mathbb{R}_+^*)$?

Non.

Pour $0<t<1$ on a $t^n \leq t$ $\forall n\geq 1$ et donc

$e^{-t^n} \geq e^{-t} > 0$. Ainsi, pour tout $t\in(0,1)$

$$\sum_{n\geq 1} t^{-1/2} e^{-t^n} \geq \sum_{n\geq 1} t^{-1/2} e^{-t} = t^{-1/2} e^{-t} \sum_{n\geq 1} 1 = +\infty$$

Donc $\sum_{n\geq 1} f_n \notin L^p(\mathbb{R}_+^*)$ pour $p\geq 1$.

On peut aussi remarquer que pour $1 \leq p < 2$, les normes $\|f_n\|_p$ ne tendent pas vers zero, donc la convergence en norme n'est pas possible, mais la preuve ci-dessus suffit.

Exercice 3: Soit $1 < p < +\infty$. Pour tout $f\in L^p(\mathbb{R}_+^*)$ soit

$$F(x) = \frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,dt \quad , \text{ pour } x>0.$$

on note aussi $F = H(f)$.

① Montrer que $\forall f\in L^p(\mathbb{R}_+^*)$, $F(x)$ est bien définie $\forall x>0$ et vérifie $|F(x)| \leq |x|^{-1/p} \|f\|_p$

Soit $p>1$ et soit q son exposant conjugué.

Pour tout $x>0$ la fonction $g_x \doteq \frac{1}{x}\mathbb{1}_{[0,x]}$ appartient à $L^q(\mathbb{R}_+^*)$. Donc, grâce à l'inégalité de Hölder on a:

$\frac{1}{x}\mathbb{1}_{[0,x]} f \in L^1(\mathbb{R}_+^*)$, $F(x)$ est bien définie et:

$$\left\|\frac{1}{x}\mathbb{1}_{[0,x]} f\right\|_1 \leq \left\|\frac{1}{x}\mathbb{1}_{[0,x]}\right\|_q \|f\|_p = \left(\frac{1}{x}\int_0^x dt\right)^{1/q} \|f\|_p = x^{-\frac{1}{p}}\|f\|_p$$

Donc

$$|F(x)| = \left|\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,dt\right| = \left|\int_{\mathbb{R}_+^*} \frac{1}{x}\,\mathbb{1}_{[0,x]}(t)\, f(t)\,dt\right|$$

$$\leq \int_{\mathbb{R}_+^*} \left|\frac{1}{x}\,\mathbb{1}_{[0,x]}(t)\, f(t)\right| dt = \left\|\frac{1}{x}\,\mathbb{1}_{[0,x]}\, f\right\|_1$$

$$\leq x^{-1/p}\,\|f\|_p \qquad \text{or } x>0 \text{ donc } x=|x|$$

ce qui donne $\quad |F(x)| \leq |x|^{-1/p}\,\|f\|_p.$ ▪

② Soit $f \in C_c^0(\mathbb{R}_+^*)$ tq. $f \geq 0$

(a) Montrer que $F \in C^1(\mathbb{R}_+^*)$, F est à valeurs positives et $\forall p>1$ on a $\lim\limits_{x\to+\infty} x(F(x))^p = 0$.

Puisque f est continue, la fonction $x \mapsto \int_0^x f(t)\,dt$ est la primitive de f qui s'annule en zéro, elle est de classe C^1 car f est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

F est donc de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$ car produit de fonctions C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$. De plus, $f \geq 0$ donc $x \mapsto \int_0^x f(t)\,dt$ est positive, et $\forall x>0$ on a $\frac{1}{x}>0$

Donc $F(x) \geq 0 \quad \forall x>0$.

Puisque $f \in \mathcal{C}_c^0$, il existe $A>0$ tq. $\int_A^{+\infty} f(t)^p\,dt = 0$

Pour $x>A$ on a $\int_0^x f(t)\,dt = \int_0^A f(t)\,dt$

Donc

$$F(x) = \frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,dt = \frac{1}{x}\int_0^A f(t)\,dt = \frac{C}{x}$$

avec $C \doteq \int_0^A f(t)\,dt > 0$ et

$$x F^p(x) = x \frac{C^p}{x^p} = \frac{C^p}{x^{p-1}} \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0 \quad \text{car } p>1.$$

(b) Montrer que $\forall x>0$ on a:

$$x F'(x) + F(x) = f(x).$$

Pour tout $x>0$ on a:

$$F'(x) = -\frac{1}{x^2}\int_0^x f(t)\,dt + \frac{1}{x} f(x) = -\frac{1}{x}F(x) + \frac{1}{x} f(x)$$

d'où:

$$x F'(x) = -F(x) + f(x) \quad \text{i.e.,} \quad x F'(x) + F(x) = f(x).$$

(c) Montrer que $\forall n \geq 1$ on a:

$$\int_0^n F(x)^p\,dx = n F(n)^p - p\int_0^n x F'(x) F(x)^{p-1}\,dx$$

Soit $n \geq 1$. On intègre par parties:

$$\int_0^n F(x)^p\,dx = \left[x F(x)^p\right]_0^n - p\int_0^n x F'(x) F(x)^{p-1}\,dx$$

$$= n F(n)^p - p\int_0^x x F'(x) F(x)^{p-1}\,dx$$

(d) Déduire que:

$$\int_{\mathbb{R}_+^*} F(x)^p \, dx = \frac{p}{p-1} \int_{\mathbb{R}_+^*} f(x) F(x)^{p-1} \, dx$$

Grâce aux points (b) et (c), on a:

$$\int_0^n F(x)^p \, dx = n F(n) - p \int_0^n x F'(x) F(x)^{p-1} \, dx$$

$$= n F(n) - p \int_0^n \left(f(x) F(x)^{p-1} - F(x)^p \right) dx$$

d'où

$$(1-p) \int_0^n F(x)^p \, dx = n F(n) - p \int_0^n f(x) F(x)^{p-1} \, dx$$

i.e.

$$\circledast \quad \int_0^n F(x)^p \, dx = \frac{n}{1-p} F(n) - \frac{p}{1-p} \int_0^n f(x) F(x)^{p-1} \, dx$$

$f \in C_c^0(\mathbb{R}_+^*)$ et $F \in C^1(\mathbb{R}_+^*)$ donc $f \cdot F^{p-1} \in C_c^0(\mathbb{R}_+^*)$

et donc $f \cdot F^{p-1} \in L^1(\mathbb{R}_+^*)$ et

$$\int_{\mathbb{R}_+^*} f(x) F(x)^{p-1} \, dx = \lim_{n \to \infty} \int_0^n f(x) F(x)^{p-1} \, dx < +\infty$$

De plus, grâce au point (a), on a $\lim\limits_{n \to \infty} n F(n)^p = 0$

On peut donc passer à la limite dans $\circledast$

pour $n \to +\infty$ et on obtient:

$$\int_{\mathbb{R}_+^*} F(x)^p \, dx = \frac{p}{p-1} \int_{\mathbb{R}_+^*} f(x) F(x)^{p-1} \, dx$$

(e) Montrer que $\|F\|_p \leq \frac{p}{p-1}\|f\|_p$ (H)

On déduit du point (d) que $F \in L^p(\mathbb{R}_+^*)$ et donc $F^{p-1} \in L^{\frac{p}{p-1}}(\mathbb{R}_+^*)$ or $\frac{p}{p-1} = q$ donc grâce à l'inégalité de Hölder :

$$\int_{\mathbb{R}_+^*} f(x) F(x)^{p-1} dx \leq \|f\|_p \|F^{p-1}\|_q = \|f\|_p \|F\|_p^{p-1}$$

ce qui donne, en utilisant le point (d) :

$$\|F\|_p^p \leq \frac{p}{p-1}\|f\|_p \|F\|_p^{p-1}$$

Si $\|F\|_p = 0$ l'inégalité à montrer est triviale et sinon on obtient bien $\|F\|_p \leq \frac{p}{p-1}\|f\|_p$ en divisant par $\|F\|_p^{p-1}$ les deux cotés.

(f) Montrer que (H) reste valable si $f \in C_c^0(\mathbb{R}_+^*)$ n'est plus supposée positive.

Dans le cas général, on pose

$f^+ \doteq \max\{0, f\}$ et $f^- \doteq \max\{0, -f\}$

On a $f^+ \geq 0$, $f^- \geq 0$, $f^+, f^- \in C_c^0(\mathbb{R}_+^*)$

et $f = f^+ - f^-$.

On raisonne donc sur f^+ et f^- séparément et on retrouve (H).

$\square$

3 On suppose à nouveau que $f \in L^p(\mathbb{R}_+^*)$. Soit $(f_n)_{n\geq 1} \subset \mathcal{C}_c^0(\mathbb{R}_+^*)$ suite tq. $\lim_{n\to+\infty} \|f_n - f\|_p = 0$.

(a) On note $F_n = H(f_n)$ et $F = H(f)$. Montrer que $\forall x>0$, $\lim_{n\to+\infty} F_n(x) = F(x)$.

Grâce au point 1, puisque $f_n - f \in L^p(\mathbb{R}_+^*)$, on a:

$$0 \leq |F_n(x) - F(x)| \leq |x|^{-1/p} \|f_n - f\|_p \quad \forall x>0$$

et donc, puisque $\lim_{n\to+\infty} \|f_n - f\|_p = 0$, on obtient

$$\lim_{n\to+\infty} |F_n(x) - F(x)| = 0$$

c'est-à-dire $\forall x>0$ $F_n(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} F(x)$.

(b) Montrer que $(F_n)_{n\geq 1}$ est une suite de Cauchy dans $L^p(\mathbb{R}_+^*)$.

La suite $(f_n)_{n\geq 1}$ converge dans $L^p(\mathbb{R}_+^*)$ et donc elle est de Cauchy, i.e. $\forall \varepsilon>0$ $\exists N_\varepsilon>0$ tq $\forall m,n \geq N_\varepsilon$ on a $\|f_n - f_m\|_p < \varepsilon \cdot \frac{p-1}{p}$

Grâce à l'inégalité (H) on a donc: par linéarité de H.

$$\|F_n - F_m\|_p = \|H(f_n) - H(f_m)\|_p = \|H(f_n - f_m)\|_p$$

$$\leq \frac{p}{p-1} \|f_n - f_m\|_p < \varepsilon$$

pour tout $n,m \geq N_\varepsilon$.

Ceci montre que $(F_n)_{n\geq 1}$ est une suite de Cauchy dans $L^p(\mathbb{R}_+^*)$

(c) En déduire que $F_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} F$ dans $L^p(\mathbb{R}_+^*)$

L'espace $(L^p(\mathbb{R}_+^*), \|\cdot\|_p)$ est complet et, d'après le point (d), $(F_n)_{n\geq 1}$ est une suite de Cauchy dans $L^p(\mathbb{R}_+^*)$, donc elle converge vers $F_\infty \in L^p(\mathbb{R}_+^*)$.

On peut donc extraire une sous-suite (F_{n_k}) qui converge simplement vers F_∞ presque partout.

Par unicité de la limite, $F_\infty = F$ presque partout car (F_n) converge simplement vers F sur $\mathbb{R}_+^*$.

Donc $F_\infty = F$ comme éléments de $L^p(\mathbb{R}_+^*)$ et $F_n \xrightarrow[n\to\infty]{} F$ dans $L^p(\mathbb{R}_+^*)$.

(d) Montrer que (H) est vraie pour $f \in L^p(\mathbb{R}_+^*)$.

On rappelle que :

* $\exists (f_n)_{n\geq 1} \subset \mathcal{C}_c^0(\mathbb{R}_+^*)$ tq. $\|f_n - f\|_p \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$
* $\forall n \geq 1$ $F_n \doteq H f_n)$ et $F = H(f)$
* On a montré que $(F_n)_{n\geq 1}$ converge vers F dans $L^p(\mathbb{R}_+^*)$ et pour tout $n \geq 1$ $\|F_n\|_p \leq \frac{p}{p-1}\|f_n\|_p$

Donc par passage à la limite pour $n \to +\infty$ on obtient $\|F\|_p \leq \frac{p}{p-1}\|f\|_p$

$\square$