

Espace L^p , analyse de Fourier

DEVOIR MAISON

À RENDRE MARDI 7 OCTOBRE 2025

Exercice 1. On rappelle que, pour un espace métrique quelconque (X, d) et une mesure de probabilité $\mu : \mathcal{B}_X \rightarrow [0, 1]$, l'ensemble des fonctions continues bornées $C_b^0(X, \mathbb{R})$ est dense dans $L^1(X, \mathbb{R}, \mu)$. Déterminer $C_c^0(X, \mathbb{R})$ pour $X = \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$. Soit $\mu : \mathcal{B}_X \rightarrow [0, 1]$ une mesure de probabilité. Est-ce que $C_c^0(X, \mathbb{R})$ est dense dans $L^1(X, \mathbb{R}, \mu)$? Justifiez la réponse.

Exercice 2. Soient μ et ν deux mesures (σ -additive) sur $\mathbb{R}^+$ telles qu'il existe $p_0 \in \mathbb{R}$ tel que

$$\forall p \geq p_0, \int_0^{+\infty} e^{-px} \mu(dx) = \int_0^{+\infty} e^{-px} \nu(dx) < +\infty.$$

On cherche à montrer que $\mu = \nu$.

- (1) On rappelle qu'une algèbre de fonctions continues est un sous espace vectoriel de $C_b^0(X, \mathbb{R})$ stable par multiplication. Énoncer le théorème de Stone-Weierstrass de densité des algèbres de fonctions continues sur les espaces compacts X .
- (2) On suppose ici que μ et ν sont des mesures de probabilité et que $p_0 = 0$. Montrer alors que $\mu = \nu$.
- (3) Conclure dans le cas général où p_0 est quelconque et μ et ν sont seulement σ -additives.
- (4) On note

$$\mathcal{E}_{p_0} := \left\{ f :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R} : f \text{ est mesurable et } \int_0^{+\infty} e^{-p_0 x} |f(x)| dx < +\infty \right\} / \sim,$$

quotienté par la relation d'équivalence $f \sim g \Leftrightarrow \text{Leb}(\{f \neq g\}) = 0$. On appelle transformée de Laplace de $f \in \mathcal{E}_{p_0}$, notée $\mathcal{L}[f]$, la fonction

$$\forall f \in \mathcal{E}_{p_0}, \forall p \geq p_0, \mathcal{L}[f](p) = \int_0^{+\infty} e^{-px} f(x) dx.$$

Montrer que la transformée de Laplace est injective.