

Année Universitaire 2025-2026

Parcours : Master 1 **Cours :** L^p , Convolution, Fourier

Code : 4TMA711U

Épreuve : Devoir surveillé intermédiaire

Date : 22/10/2025 **Heure :** 9h30

Durée : 2 heures

LES NOTES DE COURS NE SONT PAS AUTORISÉES. LA CALCULETTE BORDEAUX EST AUTORISÉE. LES EXERCICES SONT DE DIFFICULTÉ CROISSANTE. LE BARÈME EST INDICATIF SUR 20 POINTS

Dans toutes les questions de ce devoir, on ne demande jamais de vérifier la mesurabilité des fonctions considérées. On note par $\|\cdot\|_p$ la norme $\|\cdot\|_{L^p}$. L'espace $L^1_{loc}(\mathbb{R})$ est l'espace des classes de fonctions f telles que, pour tout $R > 0$, $\mathbb{1}_{[-R,R]}f \in L^1(\mathbb{R})$. On note par $C_c^0(\mathbb{R}_+^*)$, l'ensemble des fonctions continues à support compact sur $\mathbb{R}_+^*$.

Question de cours (2 points). Soit $p \in [1, +\infty[$ et $f \in L^p(\mathbb{R}_+^*)$. Rappeler les grandes lignes de la démonstration du théorème qui affirme qu'il existe une suite de fonctions $f_n \in C_c^0(\mathbb{R}_+^*)$ telle que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|f - f_n\|_p = 0$. La rédaction comportera une vingtaine de lignes.

exercice 1 (3 points). Soient p, q tels que $1 \leq p < q < +\infty$.

1. Comparer les espaces $L^p([0, 1])$ et $L^q([0, 1])$. (On déterminera si les inclusions sont strictes).
2. Montrer que, pour tout $p \geq 1$, $L^p(\mathbb{R}) \subset L^1_{loc}(\mathbb{R})$.
3. Soit $f \in L^p(\mathbb{R})$. Déterminez $\|\delta_\alpha f\|_p$, où $\delta_\alpha f(t) := f(\alpha t)$ et $\alpha > 0$, en fonction de $\|f\|_p$.

exercice 2 (4 points). Pour $n \geq 1$, on définit la fonction $f_n : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$ par $f_n(t) = t^{-\frac{1}{2}} e^{-t^n}$.

1. Montrer qu'il existe un plus grand $p^* > 1$ tel que pour tout $n \geq 1$ et $p \in [1, p^*[$, $f_n \in L^p(\mathbb{R}_+^*)$.
2. Pour tout $t_0 > 0$, montrer que la suite numérique $(f_n(t_0))_{n \geq 1}$ converge vers une limite finie que l'on notera $f(t_0)$.
3. Montrer que pour tout $p < p^*$, $(f_n)_{n \geq 1}$ converge vers f dans $L^p(\mathbb{R}_+^*)$.
4. La série $\sum_{n \geq 1} f_n$ converge-t-elle dans $L^p(\mathbb{R}_+^*)$?

exercice 3 (11 points). Soit $p \in]1, +\infty[$. Pour tout $f \in L^p(\mathbb{R}_+^*)$ on pose

$$\forall x > 0, \quad F(x) = \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt,$$

et on notera aussi $F = H(f)$.

1. Montrer que pour tout $f \in L^p(\mathbb{R}_+^*)$, $F(x)$ est bien définie pour tout $x > 0$ et vérifie

$$|F(x)| \leq |x|^{-\frac{1}{p}} \|f\|_p.$$

2. On suppose dans cette question que $f \in C_c^0(\mathbb{R}_+^*)$ et que $f \geq 0$.

- (a) Montrer que F est C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$, à valeurs positives et que pour tout $p > 1$, on a

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} xF(x)^p = 0.$$

- (b) Montrer que pour tout $x > 0$, on a

$$xF'(x) + F(x) = f(x).$$

- (c) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\int_0^n F(x)^p dx = nF(n)^p - p \int_0^n xF'(x)F(x)^{p-1} dx.$$

- (d) Dédurre des questions précédentes que

$$\int_{\mathbb{R}_+^*} F(x)^p dx = \frac{p}{p-1} \int_{\mathbb{R}_+^*} f(x)F(x)^{p-1} dx.$$

(On justifiera bien la convergence des intégrales).

- (e) Montrer que

$$\|F\|_p \leq \frac{p}{p-1} \|f\|_p. \quad (\text{H})$$

- (f) Montrer que l'inégalité (H) reste valable si $f \in C_c^0(\mathbb{R}_+^*)$ n'est plus supposée positive.

3. On suppose maintenant à nouveau que $f \in L^p(\mathbb{R}_+^*)$. On considère une suite de fonctions $f_n \in C_c^0(\mathbb{R}_+^*)$ telle que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|f - f_n\|_p = 0$.

- (a) On note $F_n = H(f_n)$ et $F = H(f)$. Montrer que pour tout $x > 0$, $F_n(x) \rightarrow F(x)$ quand $n \rightarrow \infty$.
- (b) Montrer que la suite $(F_n)_{n \geq 1}$ est de Cauchy dans $L^p(\mathbb{R}_+^*)$.
- (c) En déduire que $F_n \rightarrow F$ dans $L^p(\mathbb{R}_+^*)$.
- (d) Montrer que l'inégalité (H) est vraie pour $f \in L^p(\mathbb{R}_+^*)$.