

DST
Année Universitaire 2025-2026

Parcours : Master 1 **Cours :** L^p , Convolution, Fourier

Code : 4TMA711U

Épreuve : Devoir surveillé terminal

Date : 18/12/2025 **Heure :** 14h30

Durée : 3 heures

LES NOTES DE COURS NE SONT PAS AUTORISÉES. LA CALCULETTE BORDEAUX EST AUTORISÉE. LES EXERCICES SONT DE DIFFICULTÉ CROISSANTE. LE BARÈME EST INDICATIF SUR 22 POINTS

L'espace $L^p(\mathbb{R}^d)$ est l'ensemble des fonctions à valeurs complexes de module p -intégrable par rapport à la mesure de Lebesgue. On note par $\|\cdot\|_p$ la norme classique sur $L^p(\mathbb{R}^d)$. L'espace des fonctions de Schwartz est noté par $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$. Les transformées de Fourier $\mathcal{F}[f]$ et transformées de Fourier inverse $\mathcal{F}^{-1}[g]$ de fonctions $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ sont définies par les formules

$$\mathcal{F}[f](\xi) := \int_{\mathbb{R}^d} e^{-i2\pi\langle x, \xi \rangle} f(x) dx, \quad \mathcal{F}^{-1}[g](x) := \int_{\mathbb{R}^d} e^{i2\pi\langle x, \xi \rangle} g(\xi) d\xi, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^d.$$

On note de la même manière par $\mathcal{F}[f]$, l'extension de la transformée de Fourier à $L^1(\mathbb{R}^d)$ ou $L^2(\mathbb{R}^d)$. On munit $L^2(\mathbb{R}^d)$ du produit hermitien $\langle f, g \rangle := \int f(x) \bar{g}(x) dx$, (où $\bar{g}$ désigne le conjugué de f).

Question de cours (sur 4 points). On considère une fonction $f \in C_0^0(\mathbb{R}^d)$ (continue tendant vers 0 à l'infini) et une approximation de l'unité $(\rho_\epsilon)_{\epsilon>0}$.

1. Rappeler la définition d'une approximation de l'unité.
2. Montrer que f est uniformément continue sur $\mathbb{R}$.
3. Montrer que pour tout $g \in L^1(\mathbb{R}^d)$, $f \star g \in C_0^0(\mathbb{R}^d)$ (continue et tendant vers 0 à l'infini).
4. Montrer que $(f \star \rho_\epsilon)_{\epsilon>0}$ tend vers f uniformément sur $\mathbb{R}^d$.

Exercice 1 (sur 2 points). On considère $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ and $g \in L^2(\mathbb{R}^d)$.

1. Rappeler l'inégalité qui existe entre $\|f \star g\|_2$, $\|f\|_1$, et $\|g\|_2$.
2. Montrer

$$\mathcal{F}[f \star g] = \mathcal{F}[f] \mathcal{F}[g].$$

Indication : prendre deux suites de fonctions C^∞ à support compact $(f_n)_{n \geq 0}$ et $(g_n)_{n \geq 0}$ vérifiant L^1 - $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n = f$ et L^2 - $\lim_{n \rightarrow +\infty} g_n = g$.

Exercice 2 (sur 3 points). On considère une fonction $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap C^0(\mathbb{R})$. On suppose que pour un certain $x_0 \in \mathbb{R}$ on a

$$\int_{-1}^1 \left| \frac{f(x_0 - y) - f(x_0)}{y} \right| dy < +\infty.$$

On introduit aussi pour tout $R > 0$ le noyau de Dirichlet

$$D_R(y) = \frac{\sin(2\pi Ry)}{\pi y}, \quad \forall y \neq 0.$$

1. Montrer

$$\int_{-R}^R \mathcal{F}[f](\xi) e^{i2\pi x_0 \xi} d\xi = f \star D_R(x_0).$$

2. Montrer

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{|y| > 1} f(x_0 - y) D_R(y) dy = 0.$$

3. En admettant que $\int_0^{+\infty} \sin(t)/t dt = \frac{\pi}{2}$, montrer

$$f(x_0) = \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{-R}^R \mathcal{F}[f](\xi) e^{i2\pi x_0 \xi} d\xi.$$

Exercice 3 (sur 13 points). On définit la fonction (appelée multiplicateur de Fourier)

$$\forall \xi \in \mathbb{R}, m(\xi) := \begin{cases} -i & \xi > 0, \\ 0 & \xi = 0, \\ i & \xi < 0, \end{cases}$$

et on considère l'application linéaire $\mathcal{H}$ sur $L^2(\mathbb{R})$ (appelée transformée de Hilbert)

$$\mathcal{H}[f] = \mathcal{F}^{-1}[m\mathcal{F}[f]], \quad \forall f \in L^2(\mathbb{R}).$$

1. Montrer que

- (a) $\mathcal{H}$ est une isométrie de $L^2(\mathbb{R})$,
- (b) $\overline{\mathcal{H}[f]} = \mathcal{H}[\overline{f}]$, pour tout $f \in L^2(\mathbb{R})$,
- (c) $\langle \mathcal{H}[f], g \rangle = -\langle f, \mathcal{H}[g] \rangle$, pour tout $f, g \in L^2(\mathbb{R})$.

2. On note $f(x) = \mathbb{1}_{[0,1]}(x)$ la fonction indicatrice de l'intervalle $[0, 1]$ considérée comme une fonction de $L^2(\mathbb{R})$. Montrer

- (a) $g(\xi) := m(\xi)\mathcal{F}[f](\xi) = (e^{-i2\pi\xi} - 1)/(2\pi|\xi|)$.
- (b) On note $g_R(\xi) = \mathbb{1}_{[-R,R]}(\xi)g(\xi)$ pour $R > 0$ et $\xi \in \mathbb{R}$. Montrer pour tout $x \notin \{0, 1\}$,

$$\mathcal{F}^{-1}[g_R](x) = \frac{1}{\pi} \log \left| \frac{x}{x-1} \right| - \int_{2\pi|x-1|R}^{2\pi|x|R} \frac{\cos(t)}{\pi t} dt,$$

- (c) Déterminer $\mathcal{H}[f]$ comme fonction de $L^2(\mathbb{R})$ (un raisonnement précis est demandé).
A-t-on $f \in L^1(\mathbb{R})$? A-t-on $\mathcal{H}[f] \in L^1(\mathbb{R})$ (justifier)?

3. On note pour tout $t > 0$ et $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$

$$\mathcal{H}_t[f](x) = \frac{1}{\pi} \int_{|y| > t} \frac{f(x-y)}{y} dy, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

- (a) Montrer que la famille de fonctions $(\mathcal{H}_t[f])_{t>0}$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$ lorsque $t \rightarrow 0$. Indication : remarquer que $\int_{1>|y|>t} \frac{1}{y} dy = 0$ et démontrer

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |\mathcal{H}_t[f](x) - \mathcal{H}_{t'}[f](x)| \leq 2|t - t'| \|f'\|_\infty.$$

On notera par $\mathcal{H}_0[f]$ la limite de $(\mathcal{H}_t[f])_{t>0}$ lorsque $t \rightarrow 0$.

- (b) Quel théorème du cours permet d'affirmer sans démonstration que $\mathcal{H}_t[f]$ est une fonction C^∞ ? Quelle est la dérivée d'ordre n de $\mathcal{H}_t[f]$? Quelle est la régularité de $\mathcal{H}_0[f]$?
4. On note pour tout $t > 0$ et pour tout $\xi \in \mathbb{R}$, $m_t(\xi) := m(\xi)e^{-2\pi t|\xi|}$.
- (a) Montrer

$$p_t(x) := \mathcal{F}^{-1}[m_t](x) = \frac{1}{\pi} \frac{x}{x^2 + t^2}.$$

- (b) Soit $f \in L^2(\mathbb{R})$. Montrer que $p_t \star f \in L^2(\mathbb{R}) \cap C^\infty(\mathbb{R})$ pour tout $t > 0$ et que

$$L^2\text{-}\lim_{t \rightarrow 0} p_t \star f = \mathcal{H}[f].$$

5. On considère $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$.

- (a) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$\lim_{t \rightarrow 0} \int_{|y|>t} f(x-y) \left[\frac{1}{y} - \frac{y}{y^2 + t^2} \right] dy = 0.$$

- (b) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$\lim_{t \rightarrow 0} \int_{|y|<t} f(x-y) \frac{y}{y^2 + t^2} dy = 0.$$

- (c) Montrer que pour presque tout $x \in \mathbb{R}$

$$\mathcal{H}[f](x) = \mathcal{H}_0[f](x).$$