

TD3 – Convolution

Exercice 1 Soient $a < b$ et $c < d$ des réels tels que $d - c < b - a$, $f = \mathbf{1}_{[a,b]}$ et $g = \mathbf{1}_{[c,d]}$. Calculer $f * g$.

Exercice 2 Soient $a, b > 0$. Calculer $f_a * f_b$ où $f_a(x) = e^{-ax^2}$ pour $x \in \mathbb{R}$.

Exercice 3 Soient $a \in \mathbb{R}$, $g = \mathbf{1}_{[0,+\infty[}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n \geq a$, $f_n = \mathbf{1}_{[a,n]}$. Calculer $f_n * g$. Étudier $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n * g(x)$ pour $x \in \mathbb{R}$. Mêmes questions en remplaçant f_n par $h_n = \mathbf{1}_{[-n,a]}$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq -a$.

Exercice 4 Pour toute fonction $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$, on définit le support de f par

$$\text{supp}(f) = \overline{\{x \in \mathbb{R}^d, f(x) \neq 0\}}.$$

Soient $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ et $g \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$. Montrer que $\text{supp}(f * g) \subset \overline{\text{supp}(f) + \text{supp}(g)}$.

Exercice 5 Soient X et Y deux boréliens de $\mathbb{R}^d$ de mesure de Lebesgue λ strictement positive. Le but de cet exercice est de démontrer que $Z := X + Y$ est d'intérieur non vide. On suppose dans un premier temps que $\lambda(X)$ et $\lambda(Y)$ sont finis.

1. Montrer que $\phi := \mathbf{1}_X * \mathbf{1}_Y$ est intégrable, que $\|\phi\|_{L^1} > 0$ et que ϕ est continue (on pourra utiliser l'exercice 7).
2. En déduire qu'il existe $x_0 \in \mathbb{R}^d$ et $r > 0$ tels que $\phi > 0$ sur $B(x_0, r)$.
3. Montrer que x_0 appartient à l'intérieur de Z .
4. Traiter le cas où $\lambda(X)$ et $\lambda(Y)$ ne sont plus supposés finis.

Exercice 6 Dans cet exercice on note $C_b(\mathbb{R})$ l'espace des fonctions continues et bornées sur $\mathbb{R}$ muni de $\|\cdot\|_\infty$ et τ_α l'opérateur de translation défini par $\tau_\alpha f = f(\cdot + \alpha)$. On considère une application linéaire continue $T : L^p(\mathbb{R}) \rightarrow C_b(\mathbb{R})$ (pour un certain $p \in [1, \infty[$). On suppose que T commute aux translations, c'est-à-dire que $T \circ \tau_\alpha = \tau_\alpha \circ T$ pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$.

1. Soit $\phi : L^p(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $\phi(f) = T(f)(0)$. Montrer que ϕ est continue.
2. Montrer qu'il existe une fonction $g \in L^{p'}(\mathbb{R})$ (où $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$) telle que

$$\forall f \in L^p, \phi(f) = \int_{\mathbb{R}} f(y)g(-y)dy.$$

3. Montrer que pour tout $f \in L^p$, $Tf = f * g$.

Exercice 7 Soient $p, q \in [1, \infty]$ deux exposants conjugués : $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ et $f \in L^p(\mathbb{R}), g \in L^q(\mathbb{R})$.

1. Montrer que la fonction $f * g$ est bien définie, vérifie

$$\|f * g\|_\infty \leq \|f\|_p \|g\|_q$$

et que c'est une fonction uniformément continue.

2. Montrer de plus, que si $1 < p < +\infty$ alors $\lim_{|x| \rightarrow +\infty} f * g(x) = 0$.

3. Que se passe-t-il pour $p = 1$ et $q = +\infty$?

Exercice 8 Soient $p, q, r \in]0, +\infty[$. On suppose qu'il existe $C > 0$ tel que pour toutes fonctions f et g continues à support compact sur $\mathbb{R}^d$ on a

$$\|f * g\|_r \leq C \|f\|_p \|g\|_q.$$

En considérant des fonctions de la forme $f_\lambda(x) = f(\lambda x)$ avec $\lambda > 0$, montrer qu'on a nécessairement $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 + \frac{1}{r}$.

Exercice 9 Le but de cet exercice est de démontrer l'inégalité de Young. On suppose que $1 \leq p, q, r \leq +\infty$ sont tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 + \frac{1}{r}$. On note $C_c(\mathbb{R}^d)$ l'espace des fonctions continues à support compact. On veut montrer que pour tout $f, g \in C_c(\mathbb{R}^d)$, on a

$$\|f * g\|_r \leq \|f\|_p \|g\|_q. \quad (1)$$

1. On suppose $r = 1$. Montrer que $p = q = 1$ et démontrer (1).

2. On suppose que $r = +\infty$. Démontrer (1).

3. On suppose désormais que $1 < r < \infty$.

(a) On suppose que $p = 1$ (le cas $q = 1$ s'en déduit par commutativité de la convolution). En appliquant l'inégalité de Hölder aux fonctions $y \mapsto |f(x-y)|^{\frac{q-1}{q}}$ et $y \mapsto |f(x-y)|^{\frac{1}{q}} |g(y)|$, montrer que

$$\int |f(x-y)g(y)| dy \leq \|f\|_1^{1-\frac{1}{q}} \left(\int |f(x-y)| |g(y)|^q dy \right)^{\frac{1}{q}}$$

En déduire que $f * g \in L^q$ et que (1) est valide (remarquer que $r = q$).

(b) On suppose maintenant que $1 < p, q < \infty$.

i. Montrer que pour tout $x, y \in \mathbb{R}^d$, on a

$$|f(x-y)g(y)| = |f(x-y)|^{\frac{p}{r}} |g(y)|^{\frac{q}{r}} \times |f(x-y)|^{\frac{r-p}{r}} \times |g(y)|^{\frac{r-q}{r}}.$$

ii. En appliquant l'inégalité de Hölder à trois termes aux fonctions ci-dessus, montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^d$, on a

$$\left(\int |f(x-y)g(y)| dy \right)^r \leq (|f|^p * |g|^q(x)) \|f\|_p^{r-p} \|g\|_q^{r-q}$$

iii. Conclure à l'aide de la question 1).