ANALYSE: CONVERGENCE ET DUALITÉ

PHILIPPE JAMING

Rappels d'intégration

1. Intégrale de Riemann

1h

Commençons par rappeler la définition d'intégrabilité au sens de Riemann:

Soit $[a,b]$ un intervalle et $f:[a,b]\to\mathbb{R}$. Une subdivision de $[a,b]$ est une suite *finie* $a_0=a<a_1<\cdots<a_N=b$ et son pas est $\eta=\max_{j=1,\ldots,N}a_{j+1}-a_n<\eta$. Notons qu'une subdivision de pas η a au moins $\dfrac{b-a}{\eta}$ éléments, ce nombre tend donc vers l'infini si le pas tend vers 0. Pour $a_0,\ldots,a_N$ une subdivision, on définit la *somme de Riemann supérieure*

$$I^+(f,a_0,\ldots,a_N)=\sum_{j=0}^{N-1}(a_{j+1}-a_j)\sup_{t\in[a_j,a_{j+1}]}f(t)$$

et la *somme de Riemann inférieure*

$$I^-(f,a_0,\ldots,a_N)=\sum_{j=0}^{N-1}(a_{j+1}-a_j)\inf_{t\in[a_j,a_{j+1}]}f(t).$$

Notez que bien évidemment $I^-(f,a_0,\ldots,a_N)\leqslant I^+(f,a_0,\ldots,a_N)$. On dit que f est Riemann-intégrable, d'intégrale I si, pour tout $\varepsilon>0$ il existe $\eta>0$ tel que, pour toute subdivision σ de pas $<\eta$

$$I^+(f,\sigma)-\varepsilon<I<I^-(f,\sigma)+\varepsilon.$$

On note alors $I=\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$.

Cette définition est délicate à manier dès que f n'a pas un minimum de régularité (disons continue par morceaux). Mais si f est continue, on peut se contenter de la subdivision uniforme de $[a,b]$, $a_j=a+\frac{b-a}{N}j$ et il est inutile de chercher le sup ou l'inf de f sur $[a_j,a_{j+1}]$, n'importe quelle valeur dans cet intervalle conviendra. On obtient ainsi:

Théorème 1.1. *Si f est* continue *sur $[a,b]$,*

$$\int_a^b f(t)\,dt=\lim_{N\to+\infty}\frac{1}{N}\sum_{j=0}^{N-1}f\left(a+\frac{b-a}{n}j\right).$$

Cette définition correspond à l'idée intuitive d'une intégrale.

Date: September 8, 2020.

À partir de là, on peut définir les intégrales généralisées: si f est continue sur $]a,b[$ (avec éventuellement $a=-\infty$ et $b=+\infty$) alors

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{\alpha\to a^+,\beta\to b^-}\int_\alpha^\beta f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Si cette limite (double) existe, on dit que l'intégrale est absolument convergente. Rappelons que cela ne signifie pas que $\int_\alpha^\beta f(t)\,\mathrm{d}t$ est bornée sauf si f est *positive*:

$$\left|\int_a^b f(t)\,\mathbf{d}t\right| < +\infty \textbf{ ne signifie pas que } \int_a^b f(t)\,\mathbf{d}t \textbf{ converge.}$$

Enfin, rappelons également que si $\int_\alpha^\beta |f(t)|\,\mathrm{d}t$ est bornée, alors $\displaystyle\int_a^b |f(t)|\,\mathrm{d}t$ converge (la seule divergence possible est $+\infty$) c'est pour cela qu'on écrit $\displaystyle\int_a^b |f(t)|\,\mathrm{d}t < +\infty$ pour dire qu'une intégrale généralisée d'une fonction positive converge. Dans ce cas $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ converge (et on dit que l'intégrale est *absolument convergente*.

Exemple 1.2. $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$ est convergente mais pas absolument convergente.

Avant de lire la suite, le lecteur dessinera le graphe de $t\to\dfrac{\sin t}{t}$.

Convergence, version analytique. Commençons par remarquer que $t\to\dfrac{\sin t}{t}$ est continue sur $]0,+\infty)$ et, comme $\sin t\sim t$ en 0, se prolonge par continuité en 0. Il n'y a donc de problème qu'en $+\infty$. Une intégration par parties donne

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{1-\cos t}{t}\right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty}\frac{1-\cos t}{t^2}\,\mathrm{d}t.$$

Comme, comme $1-\cos t\sim t^2/2$ en 0, $\displaystyle\lim_{t\to 0}\frac{1-\cos t}{t} = \lim_{t\to+\infty}\frac{1-\cos t}{t} = 0$, les deux intégrales sont de même nature et

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty}\frac{1-\cos t}{t^2}\,\mathrm{d}t.$$

Maintenant $t\to\dfrac{1-\cos t}{t^2}$ est continue sur $]0,+\infty)$ et se prolonge par continuité en 0, il suffit de regarder ce qui se passe en $+\infty$. Mairs $\left|\dfrac{1-\cos t}{t^2}\right|\leqslant\dfrac{2}{t^2}$ et $\displaystyle\int^{+\infty}\frac{\mathrm{d}}{t^2}$ converge donc, d'après le théorème de comparaison, $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{1-\cos t}{t^2}\,\mathrm{d}t$ converge (absolument).

Remarquez qu'il convient d'être prudent l'intégration par partie ci-dessus en choisissant la primitive de sin qui s'annule en 0.

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{-\cos t}{t}\right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty}\frac{\cos t}{t^2}\,\mathrm{d}t$$

est **FAUX** (ou plutôt n'a pas de sens) car ni le terme tout-intégré ni la deuxième intégrale ne convergent en 0. Si on prend $-\cos$ comme primitive de sin, il convient alors d'écrire

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t + \left[\frac{-\cos t}{t}\right]_1^{+\infty} + \int_1^{+\infty} \frac{\cos t}{t^2}\,\mathrm{d}t$$

□

Cette démonstration ne donne aucune indication sur les raisons pour lesquelles l'intégrale $\int_0 \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$ n'est pas absolument convergente. Donnons donc une seconde démonstration.

Convergence, version géométrique. On commence à nouveau par remarquer que $t \to \frac{\sin t}{t}$ est continue sur $]0, +\infty)$ et se prolonge par continuité en 0. Il s'agît donc de montrer que

$$\lim_{A\to+\infty} \int_0^A \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$$

existe. Pour cela, on prend $A > 1234$ de sorte qu'il existe un entier $k \geqslant 1$ tel que $2k\pi \leqslant A \leqslant 2(k+1)\pi$. On remarque d'abord que

$$\left|\int_{2k\pi}^A \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_{2k\pi}^A \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{2\pi}{2k\pi} = \frac{1}{k} \to 0.$$

Ainsi

$$\lim_{A\to+\infty} \int_0^A \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t = \lim_{k\to+\infty} \int_0^{2k\pi} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$$

(au sens ou de plus, les deux limites existent ou n'existent pas simultanément) Il suffit ensuite de remarquer en regardant le signe du sinus que

$$\begin{aligned}
\int_0^{2k\pi} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t &= \sum_{j=0}^{k-1} \left(\int_{2j\pi}^{(2j+1)\pi} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t + \int_{(2j+1)\pi}^{2(j+1)\pi} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t \right) \\
&= \sum_{j=0}^{k-1} \left(\int_{2j\pi}^{(2j+1)\pi} \frac{|\sin t|}{t}\,\mathrm{d}t - \int_{(2j+1)\pi}^{2(j+1)\pi} \frac{|\sin t|}{t}\,\mathrm{d}t \right) \\
&= \sum_{\ell=0}^{2k-1} (-1)^\ell \int_{\ell\pi}^{(\ell+1)\pi} \frac{|\sin t|}{t}\,\mathrm{d}t = \sum_{\ell=0}^{2k-1} (-1)^\ell \int_0^{\pi} \frac{\sin s}{\ell\pi + s}\,\mathrm{d}s.
\end{aligned}$$

Ensuite, clairement

$$0 \leqslant \int_0^{\pi} \frac{\sin s}{(\ell+1)\pi + s}\,\mathrm{d}s \leqslant \int_0^{\pi} \frac{\sin s}{\ell\pi + s}\,\mathrm{d}s \leqslant \frac{1}{\ell}$$

donc $\int_0^{\pi} \frac{\sin s}{\ell\pi + s}\,\mathrm{d}s \to 0$. En utilisant le critère des séries alternées, $\sum_{\ell=0}^{+\infty} (-1)^\ell \int_0^{\pi} \frac{\sin s}{\ell\pi + s}\,\mathrm{d}s$ converge donc $\lim_{k\to+\infty} \int_0^{2k\pi} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$ existe. □

Cette démonstration a le mérite d'être plus flexible (elle ne repose sur aucune astuce de calcul et permet de remplace $\frac{\sin t}{t}$ par $\frac{\sin t}{f(t)}$ où f est n'importe quelle fonction croissance, tant qu'on ne crée pas de problème de convergence en 0) et de plus, explique clairement le fait que l'intégrale ne soit pas absolument convergente: la convergence ci-dessus provient du critère des séries alternées et $\sum(-1)^\ell \ell^{-1}$ converge alors que $\sum \ell^{-1}$ diverge.

L'intégrale n'est pas absolument convergente. On reprend le calcul précédent et on se rend compte que cette fois-ci, il n'y a plus de $(-1)^\ell$ puisque $|\sin t|$ est toujours positif

$$\int_0^{2k\pi}\left|\frac{\sin t}{t}\right|\mathrm{d}t=\sum_{\ell=0}^{2k-1}\int_0^\pi\frac{\sin s}{\ell\pi+s}\,\mathrm{d}s.$$

La seule difficulté est que $\sin t$ ne peut être minorée par une constante strictement positive sur $[0,\pi]$, mais sur $[\pi/6,5\pi/6]$, $\sin t\geqslant 1/2$ donc

$$\int_0^{2k\pi}\left|\frac{\sin t}{t}\right|\mathrm{d}t\quad\geqslant\quad\sum_{\ell=0}^{2k-1}\int_{\pi/6}^{5\pi/6}\frac{\sin s}{\ell\pi+s}\,\mathrm{d}s\quad\geqslant\quad\sum_{\ell=0}^{2k-1}\frac{1}{2}\int_{\pi/6}^{5\pi/6}\frac{1}{\ell\pi+s}\,\mathrm{d}s\quad\geqslant\quad\frac{1}{3}\sum_{\ell=0}^{2k-1}\frac{1}{\ell}$$

et en faisant $k\to+\infty$, on obtient la divergence souhaitée. □

Notons que l'intégrale de $f\,[a,b]\to\mathbb{C}$ est définie par

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t=\int_a^b\Re f(t)\,\mathrm{d}t+i\int_a^b\mathrm{Im}\,f(t)\,\mathrm{d}t.$$

On vérifiera avec cette définition que pour $\alpha\in\mathbb{C}$,

$$\int_a^b e^{\alpha t}\,\mathrm{d}t=\frac{e^{\alpha b}-e^{\alpha a}}{\alpha}$$

à l'aide de deux intégrations par parties puis que

$$\int_a^b t^\alpha\,\mathrm{d}t=\frac{b^{\alpha+1}-a^{\alpha+1}}{\alpha+1}$$

en écrivant

$$\int_a^b t^\alpha\,\mathrm{d}t=\int_a^b e^{(\alpha+1)\ln t}\,\frac{\mathrm{d}t}{t}$$

puis en faisant un changement de variable $s=\ln t$.

Une des difficultés de l'intégration de Riemann est d'obtenir des résultats tel que l'intervertion d'une limite et d'une intégrale. Celle-ci requière la *convergence uniforme*. Par exemple, la somme de la série géométrique nous montre que $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}t^k=\frac{1}{1-t}$ uniformément sur $[-a,a]$ pour tout $0<a<1$. Ainsi, sur $[-a,a]$,

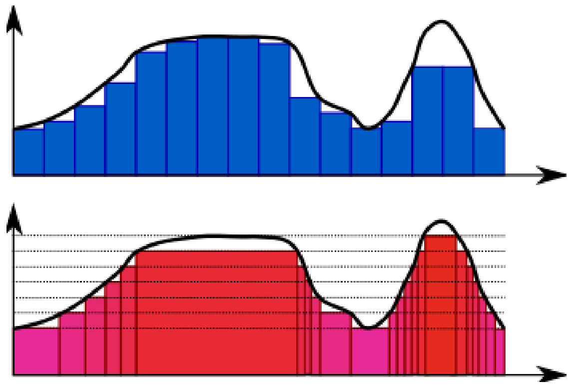
$$-\ln(1-x)=\int_0^x\frac{\mathrm{d}t}{1-t}=\int_0^x\left(\sum_{k=0}^{+\infty}t^k\right)\mathrm{d}t=\sum_{k=0}^{+\infty}\left(\int_0^x t^k\mathrm{d}t\right)=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{x^{k+1}}{k+1}.$$

Comme a est arbitraire, cette égalité est valable sur $]-1,1[$.

20min

2. Intégrale de Lebesgue

L'idée de l'intégrale de Riemann consiste à subdiviser l'ensemble de départ d'une fonction pour calculer l'intégrale, celle de Lebesgue est de subdiviser l'ensemble des valeurs comme illulstré dans l'image suivante issue de wikipedia



Cette idée simple a un inconvénient: elle nécessite pour sa construction un formalisme non négligeable qui est crucial dans certains aspects de théorie des probabilités (espérances conditionnelles,...) mais ne nous est pas indispensable dans ce cours. L'avantage est qu'elle permet l'obtention de théorèmes très puissants, en particulier pour l'intervertion d'intégrales, des limites, de dérivation...

Soit Ω un ensemble, une tribu $\mathcal{B}$ sur Ω est un ensemble de parties de Ω telles que

(i) $\varnothing, \Omega \in \mathcal{B}$
(ii) si $A \in \mathcal{B}$ alors $\Omega \backslash A \in \mathcal{B}$
(iii) si $(A_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{B}$ alors $\displaystyle\bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k \in \mathcal{B}$ et donc aussi $\displaystyle\bigcap_{k\in\mathbb{N}} A_k \in \mathcal{B}$.

En d'autres termes, $\mathcal{B}$ est stable réunion (et intersection) dénombrable ainsi que passage au complémentaire. Une fois qu'on a une tribu, on peut définir une mesure μ sur $(\Omega, \mathcal{B})$ qui est une application $\mu : \mathcal{B} \to \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$ telle que

(i) $\mu(\varnothing) = 0$
(ii) μ est *σ-additive*, c'est-à-dire que si $(A_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{B}$ sont deux à deux disjoints, alors
$$\mu\left(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k\right) = \sum_{k\in\mathbb{N}} \mu(A_k).$$

Dans ce cours, nous allons de plus supposer que μ est *σ-finie*, c'est-à-dire qu'il existe une famille $(\Omega_n)_{n\geqslant 1}$ telle que

(i) $\bigcup_{n\geqslant 1} \Omega_n = \Omega$;
(ii) $\mu(\Omega_n) < +\infty$.

Notons qu'en remplaçant Ω_n par $\displaystyle\bigcup_{k\leqslant n} \Omega_k$, on peut supposer que, pour $n \geqslant 1$, $\Omega_{n+1} \subset \Omega_n$.

Notons aussi que si on considère alors $\tilde{\Omega}_n = \Omega_{n+1} \backslash \Omega_n$, nous obtenons une nouvelle famille qui vérifie alors

(1) $n \neq m \geqslant 1$, $\tilde{\Omega}_m \cap \tilde{\Omega}_n = \varnothing$;
(2) $\bigcup_{n\geqslant 1} \tilde{\Omega}_n = \Omega$;

(3) $\mu(\tilde{\Omega}_n) < +\infty$.

Bien évidemment, une mesure est finie si $\mu(\Omega) < +\infty$ et μ est une mesure de probabilité si, de plus, $\mu(\Omega) = 1$.

Une fois que tout ceci est défini, on peut définir une fonction *mesurable* $f : \Omega \to \mathbb{R}$ si, pour tout ouvert O de $\mathbb{R}$, $f^{-1}(O) \in \mathcal{B}$. Nous ne nous étendrons pas ici sur la construction de l'intégrale, rappelons que ceci se fait en plusieurs étapes:

(1) Si $A \in \mathcal{B}$, $\displaystyle\int_\Omega \mathbf{1}_A \,\mathrm{d}\mu = \mu(A)$

(2) Si $(A_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \mathcal{B}$ sont deux-à-deux disjoints et $f = \sum_{k\in\mathbb{N}} \lambda_k \mathbf{1}_{A_k}$ (f est étagée) avec $\lambda_k \geqslant 0$ alors $\displaystyle\int_\Omega f \,\mathrm{d}\mu = \sum_{k\in\mathbb{N}} \lambda_k \mu(A_k)$.

Notons que cette série peut être divergente, mais vaudra alors $+\infty$ car ses termes sont positifs.

(3) Si f est une fonction mesurable à valeurs réelles positives alors

$$\int_\Omega f \,\mathrm{d}\mu = \sup\left\{\int_\Omega g \,\mathrm{d}\mu \ : 0 \leqslant g \leqslant f,\ g \text{ étagée}\right\}$$

Si cette quantité est finie, on dit que f est *intégrable*.

(4) Enfin, si f est une fonction mesurable à valeurs dans $\mathbb{C}$, on dira qu'elle est intégrable si $|f|$ est intégrable. On écrit alors $f = f_1 - f_2 + i(f_3 - f_4)$ avec f_1, f_2, f_3, f_4 à valeurs réelles positives. On définit

$$\int_\Omega f \,\mathrm{d}\mu = \int_\Omega f_1 \,\mathrm{d}\mu - \int_\Omega f_3 \,\mathrm{d}\mu + i\int_\Omega f_3 \,\mathrm{d}\mu - i\int_\Omega f_4 \,\mathrm{d}\mu.$$

Notons que dans cette théorie de l'intégration, les intégrales sont absolument convergentes ou non définies.

Exemple 2.1. Parmi les exemples qu'on rencontrera dans ce cours, les principaux sont

(1) Ω un ouvert de $\mathbb{R}^d$ et $\mathcal{B}$ la tribu borélienne et μ la mesure de Lebesgue (qu'on notera $\mathrm{d}x$, ou plus générallement une measure de la forme $\omega(x)\mathrm{d}x$ où $\omega : \Omega \to \mathbb{R}^+$ est appelé un *poids*.

Si $\omega = 1$ then this measure space is finite if and only if Ω is bounded.

(2) $\Omega = \{1, \ldots, d\}$ muni de la mesure de comptage $\mu(\{k\}) = 1$. Rappelons qu'une fonction f sur Ω est simplement un vecteur $f = \big(f(1), \ldots, f(d)\big) \in \mathbb{C}^d$ et que

$$\int f(x) \,\mathrm{d}\mu(x) = \sum_{k=1}^{d} f(k).$$

(3) $\Omega = \mathbb{N}$ muni de la mesure de comptage $\mu(\{k\}) = 1$. Rappelons qu'une fonction f sur Ω est simplement une suite $f = \big(f(k)\big)_{k\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ et que

$$\int f(x) \,\mathrm{d}\mu(x) = \sum_{k=0}^{\infty} f(k).$$

Cette théorie est plus fine que celle de Riemann: toute fonction positive intégrable au sens de Riemann l'est encore au sens de Lebesgue. Les choses se compliquent pour les fonctions dont le signe n'est pas constant, mais toute fonction absolument intégrable au sens de Riemann est encore intégrable au sens de Lebesgue. Par contre $\dfrac{\sin t}{t}$ bien que mesurable

n'est pas intégrable au sens de Lebesgue sur $[0, +\infty)$ puisque $\int_0^{+\infty} \left|\frac{\sin t}{t}\right| \mathrm{d}t$ diverge. Bien évidemment, elle est intégrable sur $[0, a]$ pour tout $a > 0$ ce qui permet de la définir comme une limite d'intégrales au sens de Lebesgue.

3. Théorèmes fondamentaux de l'intégration

Nous utiliserons de façon intensive dans ce cours les résultats suivant:

30 min

3.1. **Intervertion d'intégrales.** Une des opérations les plus courantes en analyse consiste à intervertir deux sommes, deux intégrales, une sommation et une intégration. Lorsqu'on est en face d'une telle situation, on peut déjà *essayer* de voir si cela mène à un résultat intéressant. Il faut ensuite être en mesure de montrer que cette opération est légitime. C'est l'objet du théorème suivant:

Théorème 3.1 (Fubini)**.**
Soeint $(\Omega_1, \mathcal{B}_1, \mu_1)$ *et* $(\Omega_2, \mathcal{B}_2, \mu_2)$ *deux espaces mesurés* σ-finis *et soit* f *une fonction mesurable sur* $\Omega_1 \times \Omega_2$.

Si $f \geqslant 0$, *on a égalité entre les 3 intégrales suivantes (qui peuvent éventuellement valoir* $+\infty$ *toutes les 3)*

$$\int_{\Omega_1\times\Omega_2} f(x,y) d\mu_1 \otimes \mu_2(x,y) = \int_{\Omega_1} \left(\int_{\Omega_2} f(x,y) d\mu_2(y)\right) d\mu_1(x)$$
$$= \int_{\Omega_2} \left(\int_{\Omega_1} f(x,y) d\mu_1(x)\right) d\mu_2(y).$$

En particulierr, les fonctions $x \to \int_{\Omega_2} f(x,y) d\mu_2(y)$ *et* $y \to \int_{\Omega_2} f(x,y) d\mu_1(x)$ *sont mesurables.*

Si f *est à valeurs rélles ou complexe, cette égalité est encore valable* à condition que

$$\int_{\Omega_1\times\Omega_2} |f(x,y)| d\mu_1 \otimes \mu_2(x,y) < +\infty.$$

Dans ce cas, les trois intégrales sont finies.

Exemple 3.2. La somme de la série géométrique nous montre que $\sum_{k=0}^{+\infty} t^k = \frac{1}{1-t}$ si $|t| < 1$. Si $0 \leqslant t < 1$, comme c'est une série à termes positifs, on a

$$-\ln(1-x) = \int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{1-t} = \int_0^x \left(\sum_{k=0}^{+\infty} t^k\right) \mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\int_0^x t^k \mathrm{d}t\right) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^{k+1}}{k+1}.$$

Bien évidemment, ceci est également valable pour $-1 < x < 0$ avec le même calcul, mais pour justifier l'intervertion de la somme et de l'intégrale, on commence par noter que, si $x \leqslant 0$,

$$\int_{[0,x]} \left(\sum_{k=0}^{+\infty} |t|^k\right) \mathrm{d}t = \int_0^{|x|} \sum_{k=0}^{+\infty} t^k \mathrm{d}t = -\ln(1-|x|) < +\infty.$$

Il est bien évidemment plus commode ici de justifier cette intervertion par la convergence uniforme de la série sur $[-a,a]$, $a<1$ qui montre que

$$\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{x^k}{k}=-\ln(1-x)$$

pour tout $x\in[-a,a]$. Ceci montre la validité de cette égalité sur $]-1,1[$. En fait, la série converge uniformément sur $[-1,a]$ et est donc continue sur cet intervalle. L'identité précédente se prolonge donc par continuité en $x=-1$ ce qui donne $\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{k}=-\ln 2$.

Il est important de garder en tête que l'intervertion de deux intégrales peut donner des résultats différents lorsque les conditions du théorème de Fubini ne sont pas remplies. Pour cela, considérons les ensembles $A_n=[n,n+1]\times[n,n+1]\subset\mathbb{R}^2$ et $B_n=[n+1,n+2]\times[n,n+1]\subset\mathbb{R}^2$ (faire un dessin et ceci devient évident). On prend ensuite une suite a_n telle que $a_0=0$ et $a_n\to 1$ puis on pose $f(x,y)=\sum_{n\geqslant 0}a_n(\mathbf{1}_{A_n}-\mathbf{1}_{B_n})$. Pour $n\geqslant 1$ un entier, on remarque que si $n<y<n+1$ alors

$$\int_{\mathbb{R}^+}f(x,y)\,\mathrm{d}x=a_n\left(\int_n^{n+1}1\,\mathrm{d}x-\int_{n+1}^{n+2}1\,\mathrm{d}x\right)=0$$

et si $n<x<n+1$ alors

$$\int_{\mathbb{R}^+}f(x,y)\,\mathrm{d}y=-a_{n-1}\int_{n-1}^{n}1\,\mathrm{d}x+a_n\int_n^{n+1}1\,\mathrm{d}x=a_n-a_{n-1}.$$

Ainsi

$$\int_{\mathbb{R}^+}\left(\int_{\mathbb{R}^+}f(x,y)\,\mathrm{d}x\right)\,\mathrm{d}y=0$$

alors que

$$\int_{\mathbb{R}^+}\left(\int_{\mathbb{R}^+}f(x,y)\,\mathrm{d}y\right)\,\mathrm{d}x=\sum_{n\geqslant 1}a_n-a_{n-1}=\lim_{n\to+\infty}a_n-a_0=1$$

(série téléscopique). Notons que

$$\int_{\mathbb{R}^+}\left(\int_{\mathbb{R}^+}|f(x,y)|\,\mathrm{d}y\right)\,\mathrm{d}x=\sum_{n\geqslant 1}a_n+a_{n-1}=+\infty$$

puisque le terme général ne tend pas vers 0.

Une conséquence importante du théorème de Fubini est la suivante. Soit $(\Omega,\mathcal{B},\mu)$ un espace mesuré et $f:\Omega\to\mathbb{R}^+$ une fonction (positive). Pour $\lambda>0$, on note $D_f(\lambda)=\{x\in\Omega:\ f(x)>\lambda\}$ (l'ensemble de niveau de f) et $d_f(\lambda)=\mu\big(D_f(\lambda)\big)$.

On commence par observer que $\mathbf{1}_{D_f(\lambda)}(x)=\mathbf{1}_{[0,f(x)]}(\lambda)$ et que

$$f(x)=\int_0^{f(x)}\mathrm{d}\lambda=\int_0^{+\infty}\mathbf{1}_{[0,f(x)]}(\lambda)\,\mathrm{d}\lambda=\int_0^{+\infty}\mathbf{1}_{D_f(\lambda)}(x)\,\mathrm{d}\lambda.$$

En anglais, cette formule est appelée “layer-cake representation” qui pourrait être traduite par repésentation millefeuille de f (ou par empilement). En utilisant Fubini-Tonnelli (tout est positif), on en déduit que

$$\int_\Omega f(x)\,\mathrm{d}\mu(x)=\int_0^{+\infty}\int_\Omega\mathbf{1}_{D_f(\lambda)}(x)\,\mathrm{d}\mu(x)\,\mathrm{d}\lambda=\int_0^{+\infty}d_f(\lambda)\,\mathrm{d}\lambda. \tag{3.1}$$

45min

3.2. Convergence.

Théorème 3.3 (Convergence Monotone– Beppo-Levi)**.**
Soit $(\Omega, \mathcal{B}, \mu)$ *un espace mesuré. Soit* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite de fonctions mesurables* $\Omega \to \mathbb{R}$ *telles que*

(i) *pour* μ*-presque tout* $t \in \Omega$*,* $f_n(t)$ *est croissante i.e.* $f_n(t) \leqslant f_{n+1}(t)$*;*
(ii) $f_n \geqslant 0$ μ*-presque partout.*

Alors $\lim f_n$ *existe* μ*-presque partout (eventuellement* $\lim f_n(t) = +\infty$*) et*

$$\lim_{n\to+\infty} \int_\Omega f_n(t)\, d\mu(t) = \int_\Omega \lim_{n\to+\infty} f_n(t)\, d\mu(t)$$

(in particulier, les deux membres sont simultanément finis ou infinis).

Théorème 3.4 (Convergence Dominée– Lebesgue)**.**
Soit $(\Omega, \mathcal{B}, \mu)$ *un espace mesuré Soit* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* f *des fonctions mesurables sur* Ω *telles que*

(i) *pour* μ*-presque tout* $t \in \Omega$*,* $f_n(t) \to f(t)$ *quand* $n \to +\infty$
(ii) *il existe une fonction mesurable* φ *sur* Ω *telle que,*
  (a) φ *est à valeurs positives;*
  (b) *pour* μ*-presque tout* $t \in \Omega$*,* $|f_n(t)| \leqslant \varphi(t)$ *(donc* $|f(t)| \leqslant \varphi(t)$*);*
  (c) φ *est integrable:* $\int_\Omega \varphi(t)\, \mathrm{d}\mu(t) < +\infty$*.*

Alors $\displaystyle\int_\Omega f_n(t)\, d\mu(t) \to \int_\Omega f(t)\, d\mu(t)$ *quand* $n \to +\infty$*.*

Notons qu'on ne suppose plus f_n positive, cette hypothèse est remplacée par l'hypothèse de domination (l'existence de φ).

Deux conséequences importantes du théorème de Lebesgue sont les résultats suivant de continuité et differentiabilité des intégrales dependant d'un paramètre

Corollaire 3.5 (Continuité des intégrales dependant d'un paramètre – Lebesgue)**.**
Soit $(\Omega, \mathcal{B}, \mu)$ *un espace mesuré et* (X, d) *un espace métrique. Soit* $F : \Omega \times X \to \mathbb{C}$ *une fonction telle que :*

(i) *pour* μ*-presque tout* $t \in \Omega$*,* $x \mapsto F(t, x)$ *es continue;*
(ii) *il existe une fonction integrable* φ *sur* Ω *telle que, pour tout* $x \in X$ *et* μ*-presque tout* $t \in \Omega$*,* $|F(t, x)| \leqslant |\varphi(t)|$*.*

Alors $f : X \to \mathbb{C}$ *definie par* $f(x) = \displaystyle\int_\Omega F(t, x)\, d\mu(t)$ *est continue sur* X*.*

Proof. Soit x et $x_0 \in X$, alors

$$f(x) - f(x_0) = \int_\Omega F(t, x)\, \mathrm{d}\mu(t) - \int_\Omega F(t, x_0)\, \mathrm{d}\mu(t) = \int_\Omega \big(F(t, x) - F(t, x_0)\big)\, \mathrm{d}\mu(t).$$

Mais, pour μ presque tout t, $|F(t, x) - F(t, x_0)| \leqslant 2\varphi(t) \in L^1$ et, par continuité de F en x_0, $F(t, x) - F(t, x_0) \to 0$ quand $x \to x_0$. D'après le théorème de convergence dominée, $f(x) \to f(x_0)$ quand $x \to x_0$, et f est bien continue en x_0. □

Corollaire 3.6 (Différentiabilité des intégrales dependant d'un paramètre – Lebesgue)**.**
Soit $(\Omega, \mathcal{B}, \mu)$ *un espace mesuré et* $X \subset \mathbb{R}^d$ *un ouvert. Soit* $F : \Omega \times X \to \mathbb{C}$ *une fonction telle que :*

(i) *pour μ-presque tout $t \in \Omega$, $x \mapsto F(t,x)$ est différentiable;*
(ii) *il existe une fonction integrable φ on Ω telle que, pour tout $x \in X$ et μ-presque tout $t \in \Omega$, $|F(t,x)| \leqslant |\varphi(t)|$;*
(iii) *il existe une fonction integrable ψ on Ω telle que, pour tout $x \in X$ et μ-presque tout $t \in \Omega$, $\left|\dfrac{\partial F}{\partial x}(t,x)\right| \leqslant |\psi(t)|$;*

Alors $f : X \to \mathbb{C}$ definie par $f(x) = \displaystyle\int_\Omega F(t,x)\,d\mu(t)$ est différentiable sur X.

Exercice. La période d'oscillation d'un pendule simple d'amplitude 2α est

$$T(\alpha) = 2\int_0^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}\theta}{\sqrt{1-\sin^2\theta\sin^2\frac{\alpha}{2}}}.$$

Montrez que T est une fonction $\mathcal{C}^1$ sur $]-\pi,\pi[$ et calculez sa dérivée.
Indication: il pourra être judicieux d'introduire

$$\tilde{T}(x) = 2\int_0^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}\theta}{\sqrt{1-x^2\sin^2\theta}}$$

avec $x \in]-1,1[$.

Solution de l'exercice.

On commence par étudier $\tilde{T}$. On pose

$$f(\theta,x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2\sin^2\theta}}=(1-x^2\sin^2\theta)^{-1/2}$$

et on remarque que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\{(\theta,x)\in[0,\pi/2]\times]-1,1[\}$ avec

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,\theta)=\frac{-1}{2}(1-x^2\sin^2\theta)^{-3/2}(-2x\sin^2\theta)=x(1-x^2\sin^2\theta)^{-3/2}\sin^2\theta.$$

De plus, en fixant $a<1$, alors pour $|x|<a$, $|f(\theta,x)|\leqslant(1-a^2\sin^2\theta)^{-1/2}\leqslant(1-a^2)^{-1/2}$ (une constante) et $\int_0^{\pi/2}(1-a^2)^{-1/2}\,\mathrm{d}\theta<+\infty$. Donc, le théorème de continuité des intégrales dépendant d'un paramètre, $\tilde{T}$ est continue sur $[-a,a]$. Ensuite, toujours pour $|x|<a$,

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x}\right|\leqslant a(1-a^2\sin^2\theta)^{-3/2}\sin^2\theta\leqslant a(1-a^2)^{-3/2}.$$

Lhéorème de dérivation des intégrales dépendant d'un paramètre, $\tilde{T}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[-a,a]$ avec

$$\tilde{T}'(x)=\int_0^{\pi/2}\frac{\partial f}{\partial x}(x,\theta)\,\mathrm{d}\theta=2x\int_0^{\pi/2}\frac{\sin^2\theta}{(1-x^2\sin^2\theta)^{3/2}}\,\mathrm{d}\theta.$$

Ensuite $T(\alpha)=\tilde{T}\left(\sin\frac{\alpha}{2}\right)$ donc

$$T'(\alpha)=\tilde{T}'\left(\sin^2\frac{\alpha}{2}\right)\times\frac{1}{2}\cos\frac{\alpha}{2}$$

Ainsi

$$T'(\alpha)=\cos\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\alpha}{2}\int_0^{\pi/2}\frac{\sin^2\theta}{(1-\sin^2\frac{\alpha}{2}\sin^2\theta)^{3/2}}\,\mathrm{d}\theta=\frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}\frac{\sin^2\theta}{(1-\sin^2\frac{\alpha}{2}\sin^2\theta)^{3/2}}\,\mathrm{d}\theta\,\sin\alpha.$$

Univ. Bordeaux, IMB, UMR 5251, F-33400 Talence, France. CNRS, IMB, UMR 5251, F-33400 Talence, France.

Email address: Philippe.Jaming@math.u-bordeaux.fr