ANALYSE: CONVERGENCE ET DUALITÉ

PHILIPPE JAMING

Espaces L^p

1. Définition des espaces L^p 1h

Soit $1 \leqslant p < +\infty$ un nombre *réel* et $(\Omega, \mathcal{B}, \mu)$ un espace mesuré σ-fini. On défini

$$L^p(\Omega,\mu) = \left\{ f : \Omega \to \mathbb{C},\ f\ \mu-\text{measurable},\ \int_\Omega |f(x)|^p \, \mathrm{d}\mu(x) < +\infty \right\}.$$

Cette espace est muni de la "norme" donnée par

$$\|f\|_p = \left(\int_\Omega |f(x)|^p \, \mathrm{d}\mu(x) \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Pour $p = +\infty$, on défini

$$L^\infty(\Omega,\mu) = \{f : \Omega \to \mathbb{C},\ f\ \mu-\text{mesurable},\ \text{il existe } K > 0 \text{ telle que } |f(x)| \leqslant K,\ \mu-p.p.\}.$$

On muni cet espace de la "norme"

$$\|f\|_\infty = \inf\{K\ \ |f(x)| \leqslant K\ \mu-p.p.\}.$$

Ceci défini (presque) une norme dans le sens où cette appication vérifie

(i) Pour $f \in L^p(\Omega,\mu)$, on a $\|f\|_p \geqslant 0$ et $\|f\|_p = 0$ si et seulement si $f = 0$ μ-presque partout.
(ii) Pour $f \in L^p(\Omega,\mu)$ et $\lambda \in \mathbb{C}$,o a $\lambda f \in L^p(\Omega,\mu)$ et $\|\lambda f\|_p = |\lambda\|f\|_p$.
(iii) Pour $f, g \in L^p(\Omega,\mu)$, on a $f + g \in L^p(\Omega,\mu)$ et $\|f + g\|_p \leqslant \|f\|_p + \|g\|_p$.

Remarque 1.1. Il est important de remarquer que pour le cas particulier $p = 2$, $L^2\Omega,\mu)$ est un espace de Hilbert et que la norme est associée au produit scalaire

$$\langle f, g\rangle_{L^2(\Omega,\mu)} = \int_\Omega f(x)\overline{g(x)} \, \mathrm{d}\mu(x).$$

Exercice 1.2. (1) Soit $\alpha \in \mathbb{R}$, pour quels $p \in [1, +\infty]$ a-t-on $x^\alpha \in L^p([0, 1])$ et $x^\alpha \in L^p([1, +\infty))$.
(2) Pour $p \in [1, \infty]$, trouver $f \in L^p(\mathbb{R})$ telle que $f \notin L^q(\mathbb{R})$ pour tout $q \in [1, \infty]$, $q \neq p$.
(3) Soit $(\Omega, \mathcal{B}, \mu)$ un espace mesuré et $1 \leqslant p < \infty$. montrer que $f \in L^p(\Omega,\mu)$, $d_f(t) := \mu(\{x \in \Omega : |f(x)| > t\}) \leqslant \dfrac{\|f\|_p^p}{t^p}$.
(4) Montrer que

$$\|f\|_p^p = p \int_0^{+\infty} t^{p-1} d_f(t) \, \mathrm{d}t.$$

Date: September 25, 2020.

Esquisse de démonstration. Notons que (ii) est évident. Pour (i), on utilise le fait que si une fonction positive a pour intégrale 0, alors elle est nulle presque partout. Le dernier point (iii) est bien plus subtile (sauf les cas $p = 1$ et $p = +\infty$ qui sont triviaux et le cas $p = 2$ quand cela résulte directement de l'inégalité de Cauchy-Schwarz). Nous reportons la démonstration de ce fait à une section ultérieure. Néanmoins, il est facile de voir que $L^p(\Omega, \mu)$ est un espace vectoriel puisque

$$|f+g|^p \leqslant (|f|+|g|)^p = 2^p \left(\frac{|f|+|g|}{2}\right)^p \leqslant 2^{p-1}(|f|^p + |g|^p).$$

Cela provient de la convexité sur $[0, +\infty)$ de l'application $x \mapsto x^p$ quand $p \geqslant 1$. Il en résulte que, si $f, g \in L^p(\Omega, \mu)$ alors $f + g \in L^p(\Omega, \mu)$. □

Remarque 1.3.
— On écrira simplement $L^p(\Omega) = L^p(\mu) = L^p := L^p(\Omega, \mu)$ quand Ω, μ sont implicites. De même, on peut être amené à écrire $L^p(\Omega, \mathcal{B}, \mu)$ lorque le choix de la tribu joue un rôle particulier. Quand μ est la mesure de comptage sur $\Omega = \mathbb{N}$ ou $\mathbb{Z}$, on écrit plutôt $\ell^p(\Omega) = L^p(\Omega, \mu)$.
— Il est important de comprendre que $\|f\|_\infty$ n'est *pas le supremum* de f mais son *supremum essentiel*. Les deux quantités diffèrent en général. Par exemple, si f est defini sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ alors $\sup |f| = 1$ tandis que $\|f\|_\infty = 0$ ($\mathbb{Q}$ est de mesure 0 dont $f(x) = 0$ presque partout par rapport à la mesure de Lebesgue).

Bien sûr, si f est continue, alors $\sup |f| = \|f\|_\infty$.

La notation L^∞ est justifiée par le fait suivant que nous laissons en exercice:

Exercice 1.4.
(1) Montrer que, si $f \in L^q \cap L^\infty$ alors, pour $p > q$, $f \in L^p$.
(2) Montrer qu'on a alors $\|f\|_p \to \|f\|_\infty$ quand $p \to +\infty$.

Les normes que nous venons de définir ne sont pas réellement des normes dans le sens où $\|f\|_p = 0$ implique que $f = 0$ μ-*presque* partout et non partout.

Pour circonvenir à cette nuisance, on peut re-définir $L^p(\Omega, \mu)$ de sorte que ses éléments soient des "classes d'équivalence" de fonctions (un espace quotient). Plus préecisément, si $f \in L^p(\Omega, \mu)$, on note $\tilde{f}$ l'ensemble des fonctions h telles que $f - h = 0$ μ-presque partout et on écrit $h \sim f$. In particulier, $h \in L^p(\Omega, \mu)$ avec $\|h\|_p = \|f\|_p$. De plus, su $f \sim h$ et $h \sim g$ alors $f \sim g$ (une réunion finie – et même dénombrable- d'ensembles de mesure nulle est de mesure nulle), en particulier $\tilde{f} = \tilde{h}$. Finalement, on défini

$$\|\tilde{f}\|_p = \|f\|_p$$

et ceci ne dépend pas du choix de f dans $\tilde{f}$.

Enfin, si $\tilde{f}$ et $\tilde{g}$ sont les classes déquivalence de f et $g \in L^p(\Omega, \mu)$ et si $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$, alors on définit $\lambda\tilde{f} + \mu\tilde{g} = (\lambda f + \mu g)\tilde{}$. On voit facilement que ceci ne dépend pas du choix de f et g dans $\tilde{f}$ et $\tilde{g}$.

Nous avons maintenant deux espaces vectoriels. Les éléments du premier sont des fonctions, mais ne dispose pas d'une norme ($\|f\| = 0$ n'implique pas $f = 0$) alors que le second dispose d'une norme mais ses éléments sont seulement des classes de fonctions. Les deux espaces sont habituellement dénotés $L^p(\Omega,\mu)$ et nous utiliserons l'*abus de langage* suivant: *soit* f *une fonction dans* $L^p(\Omega,\mu)$ pour dire *soit* $\tilde{f} \in L^p(\Omega,\mu)$ *et soit* $f \in \tilde{f}$. Ceci est très confortable (et l'usage en analyse), mais il faut garder en tête que $f = g$ signifie $f = g$ μ-presque partout. De plus, si $x_0 \in \Omega$, alors $f(x_0)$ n'a pas de sens puisque $\mu(\{x_0\}) = 0$.

Bien entendu, si pour une raison ou une autre, $\tilde{f}$ contient une fonction continue (nécessairement unique), par défaut, le $f \in \tilde{f}$ choisi sera cette fonction continue et $f(x_0)$ a son sens usuel.

Par ailleurs, si μ est la mesure de comptage, *i.e.* dans ℓ^p, ce problème ne se pose pas puisque $\mu(\{x_0\}) = 1$.

Remarque 1.5. Insistons sur le fait que f est continue presque partout ne signifie pas que $\tilde{f}$ contienne une fonction continue.

Par exemple $f = \mathbf{1}_{\mathbb{Q}}$ *i.e.* $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{if } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ alors f n'est continue nulle part alors que $f = 0$ presque partout *i.e.* $f \in \tilde{0}$ et bien sûr 0est continues.

Prenons aussi $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{if } x = 0 \\ 1/x & \text{sinon} \end{cases}$, alors f est continue presque partout (le seul point de discontinuité est 0) mais il n'existe pas de fonction g continue sur $\mathbb{R}$ telle que $f(x) = g(x)$ pour presque tout x (car alors il existerait $x_n \to 0^+$ tel que $f(x_n) = g(x_n)$ et on aurait une contradiction en faisant $n \to +\infty$).

2. Hölder et Minkowski

1h20

Commençons par démontrer une inégalité qui joue un rôle central en analyse et étend l'inégalité de Cauchy-Schwarz. Elle est également un élément clé dans la démonstration de l'inégalité triangulaire pour la norme $\|\cdot\|_p$.

Théorème 2.1 (Inégalité de Hölder)**.**
Soit $(\Omega,\mathcal{B},\mu)$ *un espace mesurée. Soient* $1 \leqslant p, p' \leqslant +\infty$ *tels que* $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ *(avec la convention* $p' = +\infty$ *quand* $p = 1$ *et vice versa). Soit* $f \in L^p(\Omega,\mu)$ *et* $g \in L^{p'}(\Omega,\mu)$*, alors* $fg \in L^1(\Omega,\mu)$ *et*

$$\left|\int_\Omega f(x)g(x)\,d\mu(x)\right| \leqslant \int_\Omega |f(x)g(x)|\,d\mu(x) \leqslant \left(\int_\Omega |f(x)|^p\,d\mu(x)\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_\Omega |g(x)|^{p'}\,d\mu(x)\right)^{\frac{1}{p'}}.$$

De plus,

— *on a égalité dans la première inégalité si et seulement s'il existe* $\theta \in \mathbb{R}$ *tel que* $f(x)g(x) = e^{i\theta}|f(x)g(x)|$.

— *si* $f \neq 0$ *on a égalité dans la seconde inégalité si et seulement s'il existe un réel* $\lambda \geqslant 0$ *tel que*

(i) *pour* $1 < p < +\infty$, $|g(x)| = \lambda|f(x)|^{p-1}$ *μ-presque partout;*
(ii) *pour* $p = 1$, $|g(x)| \leqslant \lambda$ *μ-presque partout et* $|g(x)| = \lambda$ *pour μ-presque tout* x *tel que* $f(x) \neq 0$*;*
(iii) *pour* $p = +\infty$, $|f(x)| \leqslant \lambda$ *μ-presque partout et* $|f(x)| = \lambda$ *pour μ-presque tout* x *tel que* $g(x) \neq 0$*;*

Remarque 2.2. Lorsque $p = 2$ on a aussi $q = 2$ et l'inégalité de Hölder n'est autre que l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

Exercice 2.3.
Montrer que, si $1 \leqslant p_i \leqslant +\infty$ alors $\displaystyle\sum_{i=1}^m \frac{1}{p_i} = 1$, et

$$\left|\int_\Omega \prod_{i=1}^m f_i(x)\,\mathrm{d}\mu(x)\right| \leqslant \prod_{i=1}^m \|f_i\|_{p_i}.$$

Exercice 2.4.
Dans cet exercice $\Omega = \mathbb{R}$ muni de la mesure de Lebesgue $\mathrm{d}x$. Pour une fonction f sur $\mathbb{R}$ et $\lambda > 0$, on défini une nouvelle fonction f_λ sur $\mathbb{R}$ par $f_\lambda(x) = f(\lambda x)$.

(1) Exprimer $\|f_\lambda\|_p$ en fonction de $\|f\|_p$.
(2) Supposons qu'il existe une constante C telle que, pour tous $f \in L^p(\mathbb{R})$, $g \in L^q(\mathbb{R})$, on a $fg \in L^r(\mathbb{R})$ avec

$$\|fg\|_r \leqslant C\|f\|_p\|g\|_q \tag{2.1}$$

Replacer f, g par f_λ, g_λ dans (2.1) et faites varier λ entre 0 et $+\infty$. Quelle relation entre p, q, r pouvez vous en déduire.
(3) Supposez maintenant que p, q, r vérifient cette relation. Démontrer (2.1) à l'aide de Hölder.

Démonstration. Commençons par la première inégalité. Celle-ci est facile lorsque f, g sont à valeurs réelles mais un peu plus subtile lorsque f, g sont à valeurs complexes. Démontrons donc le cas général.

Il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $e^{i\theta}\displaystyle\int_\Omega f(x)g(x)\,\mathrm{d}\mu(x)$ soit un réel positif. Quitte à remplacer f par $e^{i\theta}f$, on peut supposer que $\displaystyle\int_\Omega f(x)g(x)\,\mathrm{d}\mu(x) \in \mathbb{R}^+$ donc

$$\left|\int_\Omega f(x)g(x)\,\mathrm{d}\mu(x)\right| = \int_\Omega f(x)g(x)\,\mathrm{d}\mu(x).$$

On écrit alors $fg = \varphi_1 - \varphi_2 + i\varphi_3$ avec $\varphi_1, \varphi_2 \geqslant 0$ et $\varphi_3 \in \mathbb{R}$ de sorte que

– $\Re(fg) = \varphi_1 - \varphi_2$ et $|\Re(fg)| = \varphi_1 + \varphi_2$, $\mathrm{Im}\,(fg) = \varphi_3$,
– $\displaystyle\int_\Omega \varphi_1(x)\,\mathrm{d}\mu(x), \int_\Omega \varphi_2(x)\,\mathrm{d}\mu(x) \geqslant 0$ et
– $\displaystyle\int_\Omega f(x)g(x)\,\mathrm{d}\mu(x) = \int_\Omega \varphi_1(x)\,\mathrm{d}\mu(x) - \int_\Omega \varphi_2(x)\,\mathrm{d}\mu(x) + i\int_\Omega \varphi_3(x)\,\mathrm{d}\mu(x).$

Comme ceci est un réel positif, $\displaystyle\int_\Omega \varphi_3(x)\,\mathrm{d}\mu(x) = 0$ et

$$\int_\Omega f(x)g(x)\,\mathrm{d}\mu(x) \leqslant \int_\Omega \varphi_1(x)\,\mathrm{d}\mu(x) + \int_\Omega \varphi_2(x)\,\mathrm{d}\mu(x) \tag{2.2}$$

$$= \int_\Omega \big|\Re\big(f(x)g(x)\big)\big|\,\mathrm{d}\mu(x) \leqslant \int_\Omega |f(x)g(x)|\,\mathrm{d}\mu(x). \tag{2.3}$$

Supposons maintenant que ceci soit une égalité. Chacune des inégalités précédentes est donc une égalité. Nous allons utiliser le fait que si $\varphi \geqslant 0$ est tel que $\int\varphi = 0$ alors

$\varphi = 0$ presque partout, ou plus précisément que si $\varphi \leqslant \psi$ et $\int \varphi = \int \psi$ alors $\varphi = \psi$ presque partout. On déduit donc de la dernière inégalité (2.3) que pour μ-presque tout x, $\left|\Re\big(f(x)g(x)\big)\right| = |f(x)g(x)|$ *i.e.* fg est à valeurs réelles donc $\varphi_3 = 0$. Ensuite si on a égalité dans (2.2), $\displaystyle\int_\Omega \varphi_2(x)\,\mathrm{d}\mu(x) = 0$ donc $\varphi_2 = 0$ μ-presque partout et au final $fg = \varphi_1 \geqslant 0$ soit $fg = |fg|$.

Démontrons maintenant la seconde inégalité. Lorsque $f = 0$ ou $g = 0$, il n'y a rien à faire.

Les cas $p = 1$ (donc $q = +\infty$) et $p = +\infty$ (donc $q = 1$) sont triviaux. Nous supposons donc que $1 < p < \infty$ de sorte que $1 < p' < \infty$ et $f, g \not\equiv 0$. Ceci nous permet de définir deux nouvelles fonctions

$$u = \left(\frac{|f|}{\|f\|_p}\right)^p \quad \text{and} \quad v = \left(\frac{|g|}{\|g\|_{p'}}\right)^{p'}.$$

Comme log est concave, on obtient, pour $0 < \alpha < 1$, $u^\alpha v^{1-\alpha} \leqslant \alpha u + (1-\alpha)v$. En particulier, pour $\alpha = 1/p$, on a

$$\frac{|f|}{\|f\|_p}\frac{|g|}{\|g\|_{p'}} \leqslant \frac{1}{p}\frac{|f|^p}{\|f\|_p^p} + \frac{1}{p'}\frac{|g|^{p'}}{\|g\|_{p'}^{p'}}.$$

En intégrating par rapport à μ, on obtient le résultat.

Pour le cas d'éqalité, log est en fait strictement concave, ce qui implique que pour $0 < \alpha < 1$, $u^\alpha v^{1-\alpha} < \alpha u + (1-\alpha)v$ à moins que $u = v$. On en déduit immédiatement le résultat. □

Ainsi, l'inégalité de Hölder est en fait une inégalité de convexité. Une autre inégalité de convexité importante est la suivante:

Théorème 2.5 (Inégalité de Jensen)**.**
Soit $(\Omega, \mathcal{B}, \mu)$ un espace mesuré avec μ une mesure finie. *Soit $J : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction $\mathcal{C}^1$ convexe. Pour $f \in L^1(\Omega, \mu)$, on écrit*

$$\langle f \rangle = \frac{1}{\mu(\Omega)} \int_\Omega f(x)\, d\mu(x)$$

pour sa moyenne *sur Ω. Alors*

(i) $[J \circ f]_-$*, la partie négative de $J \circ f$ est dans $L^1(\Omega, \mu)$, donc $\displaystyle\int_\Omega J \circ f(x)\, d\mu(x)$ est bien définie (éventuellement $+\infty$);*
(ii) $J(\langle f \rangle) \leqslant \langle J \circ f \rangle$*, en d'autres termes*

$$J\left(\frac{1}{\mu(\Omega)} \int_\Omega f(x)\, d\mu(x)\right) \leqslant \frac{1}{\mu(\Omega)} \int_\Omega J\big(f(x)\big)\, d\mu(x).$$

Démonstration. Comme J est convexe et $\mathcal{C}^1$, pour $a, t \in \mathbb{R}$,

$$J(t) \geqslant J(a) + J'(a)(t-a).$$

En prenant $t = f(x)$ et $a = \langle f \rangle$, ceci implique

$$J\big(f(x)\big)_+ - J\big(f(x)\big)_- = J\big(f(x)\big) \geqslant J(\langle f \rangle) + J'(\langle f \rangle) f(x) - J'(\langle f \rangle)\langle f \rangle. \tag{2.4}$$

En particulier, soit x tel que $J\big(f(x)\big)_- \neq 0$ donc $J\big(f(x)\big)_+ = 0$, et

$$\begin{aligned} 0 \leqslant J\big(f(x)\big)_- &\leqslant -J'(\langle f\rangle)f(x) + J'(\langle f\rangle)\langle f\rangle - J(\langle f\rangle) \\ &\leqslant |J'(\langle f\rangle)||f(x)| + |J'(\langle f\rangle)\langle f\rangle - J(\langle f\rangle)|. \end{aligned}$$

Comme $f \in L^1$, $|J'(\langle f\rangle)||f(x)| \in L^1$ et μ étant une mesure *finie*, les fonctions constantes sont intégrables, donc $|J'(\langle f\rangle)\langle f\rangle - J(\langle f\rangle)| \in L^1$. La première assertion est donc démontrée.

Ensuite, intégrons (2.4) pour obtenir

$$\frac{1}{\mu(\Omega)}\int_\Omega J\big(f(x)\big)\,\mathrm{d}\mu(x) \geqslant \frac{1}{\mu(\Omega)}\int_\Omega J(\langle f\rangle)\,\mathrm{d}\mu(x) + \frac{J'(\langle f\rangle)}{\mu(\Omega)}\int_\Omega f(x) - \langle f\rangle\,\mathrm{d}\mu(x).$$

Mais

$$\frac{1}{\mu(\Omega)}\int_\Omega f(x) - \langle f\rangle\,\mathrm{d}\mu(x) = 0.$$

L'inégalité de Jensen s'en suite. $\square$

Ce résultat est valable pour toute fonction convexe J puisqu'une telle fonction vérifie toujours une inégalité de la forme $J(t) \geqslant J(a) + c(t-a)$. Bien sûr $c = J'(a)$ uniquement si J est différentiable en a.

Notons que l'inégalité de Hölder résulte aussi de celle de Jensen:

Deuxième démonstration de l'inégalité de Hölder. Quitte à remplacer f, g par $|f|$, $|g|$, on peut supposer que $f, g \geqslant 0$. Les cas $p = 1$ et $p = +\infty$ sont triviaux donc nous supposons que $1 < p < +\infty$.

Soit $\Omega' = \{x \in \Omega \ :\ g(x) > 0\}$. Alors

$$\int_\Omega f^p(x)\,\mathrm{d}\mu(x) = \int_{\Omega'} f^p(x)\,\mathrm{d}\mu(x) + \int_{\Omega\setminus\Omega'} f^p(x)\,\mathrm{d}\mu(x) \geqslant \int_{\Omega'} f^p(x)\,\mathrm{d}\mu(x)$$

tandis que

$$\int_\Omega f(x)g(x)\,\mathrm{d}\mu(x) = \int_{\Omega'} f(x)g(x)\,\mathrm{d}\mu(x) \quad \text{et} \quad \int_\Omega g(x)^{p'}\,\mathrm{d}\mu(x) = \int_{\Omega'} g(x)^{p'}\,\mathrm{d}\mu(x).$$

Il suffit donc de démontrer l'inégalité de Hölder's en remplaçant Ω par Ω', en d'autre termes, de supposer que g ne s'annule pas sur Ω.

On peut alors definir une nouvelle mesure $\mathrm{d}\nu(x) = g(x)^{p'}\,\mathrm{d}\mu(x)$ ainsi que la fonction $F(x) = f(x)g(x)^{-p'/p}$. Notons que

$$\nu(\Omega) = \int_\Omega 1\,\mathrm{d}\nu(x) = \int_\Omega g(x)^{p'}\,\mathrm{d}\mu(x)$$

donc ν est une mesure *finie*. De plus

$$\begin{aligned} \frac{1}{\nu(\Omega)}\int_\Omega F(x)\,\mathrm{d}\nu(x) &= \frac{1}{\displaystyle\int_\Omega g(x)^{p'}\,\mathrm{d}\mu(x)}\int_\Omega f(x)g(x)^{-p'/p}g(x)^{p'}\,\mathrm{d}\nu(x) \\ &= \frac{\displaystyle\int_\Omega f(x)g(x)\,\mathrm{d}\mu(x)}{\displaystyle\int_\Omega g(x)^{p'}\,\mathrm{d}\mu(x)} \end{aligned}$$

puisque $-\dfrac{p'}{p}+p'=p'\left(1-\dfrac{1}{p}\right)=1$. Finallement, l'inégalité de Jensen's avec $J(t)=|t|^p$ implique

$$\left(\frac{\displaystyle\int_\Omega f(x)g(x)\,\mathrm{d}\mu(x)}{\displaystyle\int_\Omega g(x)^{p'}\,\mathrm{d}\mu(x)}\right)^p \leqslant \frac{\displaystyle\int_\Omega f(x)^p g(x)^{-p'}g(x)^{p'}\,\mathrm{d}\mu(x)}{\displaystyle\int_\Omega g(x)^{p'}\,\mathrm{d}\mu(x)}$$

qui est bien ce qu'on voulait démontrer. □

Exercice 2.6.

(1) Montrer que, si J est strictement convexe, on a une égalité dans l'inégalité de Jensen uniquement si f est constante.
(2) En déduire le cas d'égalité dans l'inégalité de Hölder.

Exercice 2.7. (Inclusion des espaces L^p)

(1) Soeint $1\leqslant p_1<p_2\leqslant+\infty$. Montre que, si $f\in L^{p_1}\cap L^{p_2}$ alors,
   (a) pour tous $p_1<p<p_2$, $f\in L^p$,
   (b) l'application $p\mapsto \log\int|f|^p$ est convexe sur $[p_1,p_2]$.
(2) À quelles conditions sur p,q a-t-on l'inclusion $\ell^p\subset\ell^q$?

Théorème 2.8 (Inéqualité de Minkowski)**.**
Soient $(\Omega,\mathcal{B},\mu)$ et $(\Gamma,\tilde{\mathcal{B}},\gamma)$ deux espaces mesurés σ-finis et soit $1\leqslant p<+\infty$. Alors, pour toute fonction f $\gamma\otimes\mu$-mesurable,

$$\left(\int_\Gamma\left|\int_\Omega f(x,y)\;d\mu(y)\right|^p d\gamma(x)\right)^{\frac{1}{p}}\leqslant\int_\Omega\left(\int_\Gamma|f(x,y)|^p\;d\gamma(x)\right)^{\frac{1}{p}}d\mu(y). \tag{2.5}$$

En particulier, si le membre de droite est fini, le membre de gauche aussi. De plus, on a égalité si et seulement si les variables de f sont séparables, c'est-à-dire si f est de la forme $f(x,y)=\alpha(x)\beta(y)$.

En d'autres termes

$$\left\|x\to\int_\Omega|f(x,y)|\,\mathrm{d}\mu(y)\right\|_p\leqslant\int_\Omega\|x\to f(x,y)\|_p\,\mathrm{d}\mu(y),$$

qui est une généralisation de l'inégalité $\left|\displaystyle\int_\Omega f(t)\,\mathrm{d}\mu(t)\right|\leqslant\displaystyle\int_\Omega|f(t)|\,\mathrm{d}\mu(t)$ u puisque celle-ci correspond au cas particulier où Γ est un singleton.

Démonstration. Il suffit de supposer que $f\geqslant0$ et que $f>0$ sur un ensemble de mesure positive. Il suffit aussi de supposer que le membre de droite de (2.5) est fini, sans quoi l'inégalité est sans objet.

Rappelons que d'après le théorème de Fubini, $y\to\displaystyle\int f(x,y)^p\,\mathrm{d}\gamma(x)$ et $H\;:\;x\to\displaystyle\int_\Omega f(x,y)\,\mathrm{d}\mu(y)$ sont mesurables.

Soit $f_n=f\chi_{E_n}$ où $E_n=F_n\cap\{(x,y)\in\Gamma\times\Omega\;:\;|f(x,y)|\leqslant n\}$ et F_n est une suite croissante de parties de mesures finie de $\Gamma\times\Omega$ qui couvrent $\Gamma\times\Omega$: $\bigcup F_n=\Gamma\times\Omega$. Pour

f_n, le membre de gauche de (2.5),

$$\left(\int_\Gamma\left(\int_\Omega |f_n(x,y)|\,\mathrm{d}\mu(y)\right)^p\mathrm{d}\gamma(x)\right)^{\frac{1}{p}}$$

est fini.

D'autre part, le théorème de convergence monotone montre que cette quantité tend vers

$$\left(\int_\Gamma\left(\int_\Omega |f(x,y)|\,\mathrm{d}\mu(y)\right)^p\mathrm{d}\gamma(x)\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Nous pouvons donc supposer que cette quantité est également finie.

D'après Fubini (Tonneli),

$$\begin{aligned}\int_\Gamma H(x)^p\,\mathrm{d}\gamma(x) &= \int_\Gamma\left(\int_\Omega f(x,y)\,\mathrm{d}\mu(y)\right)H(x)^{p-1}\,\mathrm{d}\gamma(x)\\ &= \int_\Omega\int_\Gamma f(x,y)H(x)^{p-1}\,\mathrm{d}\gamma(x)\,\mathrm{d}\mu(y).\end{aligned}$$

Mais, Hölder ($1/p+1/p'=1$) implique

$$\begin{aligned}\int_\Gamma f(x,y)H(x)^{p-1}\,\mathrm{d}\gamma(x) &\leqslant \left(\int_\Gamma f(x,y)^p\,\mathrm{d}\gamma(x)\right)^{1/p}\left(\int_\Gamma H(x)^{(p-1)p'}\,\mathrm{d}\gamma(x)\right)^{1/p'}\\ &= \left(\int_\Gamma f(x,y)^p\,\mathrm{d}\gamma(x)\right)^{1/p}\left(\int_\Gamma H(x)^p\,\mathrm{d}\gamma(x)\right)^{1-1/p}.\end{aligned}$$

Il en résulte que

$$\int_\Gamma H(x)^p\,\mathrm{d}\gamma(x)\leqslant\int_\Omega\left(\int_\Gamma f(x,y)^p\,\mathrm{d}\gamma(x)\right)^{1/p}\mathrm{d}\mu(y)\left(\int_\Gamma H(x)^p\,\mathrm{d}\gamma(x)\right)^{1-1/p}.$$

Comme nous avons supposé que $\displaystyle\int_\Gamma H(x)^p\,\mathrm{d}\gamma(x)\neq 0,+\infty$, nous pouvons diviser les deux côtés par

$$\left(\int_\Gamma H(x)^p\,\mathrm{d}\gamma(x)\right)^{1-1/p}$$

pour obtenir le résultat voulu. □

Corollaire 2.9 (Inégalité trianguliare pour les normes L^p)**.**
Soit $(\Omega,\mathcal{B},\mu)$ un espace mesuré avec μ une mesure σ-finie. Soit $1\leqslant p\leqslant+\infty$ et $f,g\in L^p(\Omega,\mu)$. Alors

$$\|f+g\|_p\leqslant\|f\|_p+\|g\|_p$$

et on a égalité si et seulement si $g=\lambda f$ avec $\lambda\geqslant 0$.

Démonstration. Soit $\Gamma=\{1,2\}$ muni de la mesure de comptage. Définissons la fonction F sur $\Gamma\times\Omega$ par $F(1,y)=f(y)$, $F(2,y)=g(y)$. L'inégalité de Minkowski se réduit alors à l'inégalité trianguliare. □

Esquisse d'une seconde démonstration. Il y a une argument un peu plus direct

$$\begin{aligned}\int_\Omega |f(x)+g(x)|^p \,\mathrm{d}\mu(x) &= \int_\Omega |f(x)+g(x)|^{p-1}|f(x)+g(x)|\,\mathrm{d}\mu(x)\\ &\leqslant \int_\Omega |f(x)+g(x)|^{p-1}|f(x)|\,\mathrm{d}\mu(x)\\ &\quad+\int_\Omega |f(x)+g(x)|^{p-1}|g(x)|\,\mathrm{d}\mu(x).\end{aligned}$$

Hölder ($\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1$ soit $p'=\frac{p}{p-1}$) implique alors

$$\int_\Omega |f(x)+g(x)|^{p-1}|f(x)|\,\mathrm{d}\mu(x)$$

$$\leqslant \left(\int_\Omega |f(x)+g(x)|^{(p-1)\frac{p}{p-1}}\,\mathrm{d}\mu(x)\right)^{1-\frac{1}{p}}\left(\int_\Omega |f(x)|^p\,\mathrm{d}\mu(x)\right)^{\frac{1}{p}}.$$

La seconde integral est traitée de la même façon. On en déduit

$$\int_\Omega |f(x)+g(x)|^p\,\mathrm{d}\mu(x)\leqslant\left(\int_\Omega |f(x)+g(x)|^p\,\mathrm{d}\mu(x)\right)^{1-\frac{1}{p}}\left(\|f\|_p+\|g\|_p\right)$$

et on conclue en divisant par $\|f+g\|_p^p$. On doit bien évidemment traiter séparément le cas où $\|f+g\|_p^p \neq 0$ mais aussi vérifier que $\|f+g\|_p^p<+\infty$, (ce qui a été fait lorsque nous avons introduit la norme de L^p). □

3. Complétude des espaces L^p

Nous allons maintenant démontrer que les espaces L^p sont complets *i.e.* des Banach. En premier lieu, adaptons le théorème de convergence dominée (qui est sous certains aspects un théorème de convergence dans L^1) à la convergence dans L^p:

Lemme 3.1 (L^p-convergence dominée)**.** *Soit $(\Omega,\mathcal{B},\mu)$ un espace mesuré σ-fini et soit $1\leqslant p<+\infty$.*

Soit (f_k) une suite dans $L^p(\Omega,\mu)$ et f,F deux fonctions dans $L^p(\Omega,\mu)$. Supposons que

(i) *pour tout k et μ-presque tout $x\in\Omega$, $|f_k(x)|\leqslant F(x)$*

(ii) *pour μ-presque tout $x\in\Omega$, $f_k(x)\to f(x)$ quand $k\to+\infty$. En particulier, $|f(x)|\leqslant F(x)$ μ-p.p.*

Alors $f_k\to f$ dans $L^p(\Omega,\mu)$ i.e. $\|f_k-f\|_p\to 0$.

Démonstration. Nous devons montrer que

$$\int_\Omega |f_k(x)-f(x)|^p\,\mathrm{d}\mu(x)\to 0. \tag{3.6}$$

Mais la condition (ii) implique $|f_k(x)-f(x)|^p\to 0$ μ-p.p.

La condition (ii) implique

$$|f_k(x)-f(x)|^p\leqslant(|f_k(x)|+|f(x)|)^p\leqslant\big(2F(x)\big)^p$$

et l'hypothèse $F\in L^p$ signifie que $\int_\Omega F(x)^p\,\mathrm{d}\mu(x)<+\infty$. Le théorème de convergence dominée nous donne donc (3.6) □

Théorème 3.2 (L^p est complet)**.**
Soit $(\Omega,\mathcal{B},\mu)$ *un espace mesuré* σ*-fini et soit* $1 \leqslant p \leqslant +\infty$*. Alors* $L^p(\Omega,\mu)$ *est complet (donc un espace de Banach).*

Plus précisément, si (f_k) *est une suite de Cauchy dans* $L^p(\Omega,\mu)$*, alors il existe une sous-suite* $(f_{k_j})_j$ *et* f,F *dans* $L^p(\Omega,\mu)$ *tels que*

(i) *pour* $j \geqslant 1$*,* $|f_{k_j}(x)| \leqslant F(x)$ *pour* μ*-presque tout* $x \in \Omega$*;*
(ii) *pour* μ*-presque tout* $x \in \Omega$*,* $f_{k_j}(x) \to f(x)$ *quand* $j \to +\infty$*.*

Remarque 3.3. La sous-suite $(f_{k_j})_j$ ainsi construite converge donc vers f dans L^p d'après le lemme précédent. Comme une suite de Cauchy qui a une sous-suite convergente converge, on en déduit que $f_k \to f$ dans L^p. Il serait toutefois erroné de penser que $f_k \to f$ presque partout.

Démonstration. Nous allons nous concentrer sur le cas $1 \leqslant p < +\infty$. Le cas $p = +\infty$ résulte essentiellement de la complétude de $\mathbb{C}$ et du fait qu'une réunion dénombrable d'ensembles négligeables est négligeable. Celle-ci est laissée en exercice.

Comme noté ci-dessus, il s'agît essentiellement de construire la suite f_{k_j}. Le processus est classique. Tout d'abord, il existe k_1 tel que pour $n \geqslant k_1$, $\|f_{k_1} - f_n\|_p \leqslant 1/2$ ($\varepsilon = 1/2$ dans la définition d'une suite de Cauchy). Il existe alors $k_2 > k_1$ tel que pour $n \geqslant k_2$, $\|f_{k_2} - f_n\|_p \leqslant 1/2^2$... On construit ainsi par récurrence une suite $k_j > k_{j-1}$ telle que, si $n \geqslant k_j$, $\left\|f_{k_j} - f_n\right\|_p \leqslant 1/2^j$.

Considérons alors la suite *croissante positive* définie par

$$F_\ell(x) = |f_{k_1}(x)| + \sum_{j=1}^{\ell} |f_{k_{j+1}}(x) - f_{k_j}(x)|.$$

L'inégalité triangulaire donne

$$\|F_\ell\|_p \leqslant \|f_{k_1}\|_p + \sum_{j=1}^{\ell} \left\|f_{k_{j+1}} - f_{k_j}\right\|_p \leqslant \|f_{k_1}\|_p + \sum_{j=1}^{+\infty} 2^{-j} = 1 + \|f_{k_1}\|_p < +\infty.$$

Le théorème de convergence monotone implique que F_ℓ converge presque partout vers une fonction $F \in L^p$. En particulier, $F(x)$ est fini pour μ-presque tout $x \in \Omega$. Pour un tel x, la série

$$f_{k_1}(x) + \sum_{j=1}^{\ell} \bigl(f_{k_{j+1}}(x) - f_{k_j}(x)\bigr)$$

est absolument convergente, donc convergente. Comme c'est une série téléscopique

$$f_{k_1}(x) + \sum_{j=1}^{\ell} \bigl(f_{k_{j+1}}(x) - f_{k_j}(x)\bigr) = f_{k_{\ell+1}}(x).$$

Nous avons donc montré que $f_{k_{l+1}}$ est convergente pour presque tout x et, avec l'inégalité triangulaire, $|f_{i_{l+1}}| \leqslant F_l \leqslant F$ ce qui complète la démonstration. □

50+40 min

4. Séparabilité des espaces L^p

20 min

4.1. **Le résultat.** Rappelons qu'un espace de Banach X est *séparable* s'il existe une partie $\mathcal{D} \subset X$ dénombrable et *dense* dans X *i.e.* telle que, si $x \in X$ pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $y \in \mathcal{D}$ tel que $\|x - y\| < \varepsilon$. De façon équivalente, il suffit qu'il existe une partie $\mathcal{D} \subset X$

dénombrable et *totale* dans X *i.e.* telle que l'espace vectoriel engendré par $\mathcal{D}$ soit dense *i.e.* telle que, si $x \in X$ alors pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $x_1, \ldots, x_N \in \mathcal{D}$ et $\lambda_1, \ldots, \lambda_N \in \mathbb{C}$ (ou $\mathbb{R}$ si X est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel) tels que $\|x - \lambda_1 x_1 - \cdots - \lambda_N x_N\| < \varepsilon$.

Rappelons qu'une tribu peut être engendrée par une famille $\mathcal{F}$ *i.e.* $\sigma(\mathcal{F})$ est la plus petite tribu qui contient $\mathcal{F}$, ce sont toutes les parties de Ω obtenues par réunion dénombrable et passage au complémentaire. Lorsque $\mathcal{F}$ est dénombrable, on notera $\sigma_{\mathbb{N}}(\mathcal{F})$ l'ensemble des parties de Ω qui sont obtenues par un nombre dénombrable d'opérattion de réunion, intersections et passage au complémentaire d'éléments de $\mathcal{F}$ et cet ensemble est encore dénombrable.

Exemple 4.1.
— Lorsque $\Omega = \mathbb{N}$ et $\mathcal{F}$ est l'ensemble des parties de la forme $\{0, \ldots, n\}$, $n \in \mathbb{N}$, il est facile de voir que $\sigma_{\mathbb{N}}(\mathcal{F}) = \mathcal{P}(\mathbb{N})$, l'ensemble des parties de Ω. La même chose est évidemment vraie lorsque $\mathcal{F}$ est l'ensemble des parties finies de $\mathcal{F}$. On obtient ainsi la tribu associée à la mesure de comptage.

— Lorsque $\Omega = \mathbb{R}$ et $\mathcal{F} = \{[a,b] \ : \ a, b \in \mathbb{Q}\}$ l'ensemble des intervalles à extrémités rationnelles, alors $\sigma_{\mathbb{N}}(\mathcal{F})$ est *presque* la tribu borélienne au sens suivant:

Si A est une partie borélienne de mesure de Lebesgue $|A|$ finie, alors pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $A_\varepsilon \in \sigma_{\mathbb{N}}(\mathcal{F})$ tel que $|(A \backslash A_\varepsilon) \cup (A_\varepsilon \cap A)| < \varepsilon$.*

En d'autres termes, la mesure de la différence symétrique $A \Delta A_\varepsilon = (A \backslash A_\varepsilon) \cup (A_\varepsilon \cap A)$ est arbitrairement petite, on voit facilement que ceci s'écrit aussi $\displaystyle\int_\Omega |\mathbf{1}_A(x) - \mathbf{1}_{A_\varepsilon}(x)| \, \mathrm{d}x < \varepsilon$. Notez que $[a,b]$ avec a, b irrationnels de fait pas partie de $\sigma_{\mathbb{N}}(\mathcal{F})$.

– Lorsque Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^d$ la même chose est vraie si on prend

$$\mathcal{F} = \left\{ \prod_{j=1}^{d} [a_j, b_j] \subset \Omega \ : \ a_j, b_j \in \mathbb{Q} \right\}.$$

On dira dans ce cas que $(\Omega, \mathcal{B}, \mu)$ a une σ-algèbre à base dénombrable $\mathcal{F}$.

Le résultat à retenir de cette section est le suivant:

Théorème 4.2 (Séparabilité des espaces L^p)**.** *Soit $(\Omega, \mathcal{B}, \mu)$ une espace mesuré une σ-algèbre à base dénombrable $\mathcal{F}$ et soit $1 \leqslant p < +\infty$. Alors la famille $\{\mathbf{1}_A \ : \ A \in \sigma_{\mathbb{N}}(\mathcal{F})\}$ est totale dans $L^p(\Omega, \mathcal{B}, \mu)$.*

En d'autres termes, la famille dénombrable des fonctions de la forme

$$f = \sum_{j=1}^{N} (\lambda_j + i\mu_j) \mathbf{1}_{A_j}$$

avec $N \in \mathbb{N}$ et pour $j = 1, \ldots, N$ $\lambda_j, \mu_j \in \mathbb{Q}$ et $A_j \in \sigma_{\mathbb{N}}(\mathcal{F})$ sont denses dans $L^p(\Omega, \mathcal{B}, \mu)$.

Une fonction de la forme ci-dessus est appelée une *fonction simple*. Le point vraiment important est de savoir que les fonctions simples sont denses (et que dans des bonnes condition sur l'espace mesuré, on peut se contenter une partie dénombrable de ces fonctions). Les deux sous-sections suivantes sont destinées à démontrer ce point et peut être omis en première lecture. Le second point important de cette section se trouve en 5

30 min

*Dans tout ce cours, nous adopterons la notation $|A|$ pour désigner la mesure de Lebesgue d'une partie $A \subset \mathbb{R}^d$

4.2. **Un peu plus sur l'intégration de Lebesgue.** Soit $(\Omega, \mathcal{B}, \mu)$ un espace mesurée σ-fini. Nous allons supposer une propriété supplémentaire: il existe une famille dénombrable $\tilde{\mathcal{B}} \subset \mathcal{B}$ telle que, si $A \in \mathcal{B}$, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $B \in \tilde{\mathcal{B}}$ telle que $\mu(A \Delta B) < \varepsilon$. Nous avons déjà vu des exemples ci-dessus.

Rappelons qu'une fonction simple sur Ω est une fonction de la forme

$$s(x) = \sum_{k \in K} a_k \mathbf{1}_{A_k} \tag{4.7}$$

avec K fini et $0 < \mu(A_k) < \infty$. On peut de plus supposer que les A_k sont disjoints. L'intégrale de Lebesgue d'une fonction positive f est définie par

$$\int_\Omega f(x)\,\mathrm{d}\mu(x) = \sup\left\{\sum_{k\in K} a_k \mu(A_k)\ : s \text{ de la forme (4.7) et tels que } s \leqslant f\right\}.$$

Notons que cette quantité peut être $+\infty$. Notons qu'on peut ajouter comme condition que les a_k soient rationnels et que les A_k soient dans $\tilde{B}$. Ainsi une famille $\mathcal{D}_0$ dénombrable de functions simples positives suffit pour définir $\displaystyle\int_\Omega f(x)\,\mathrm{d}\mu(x)$.

Comme dans l'introduction, on étend alors la définition de l'intégrale aux fonctions f à valeurs complexes à condition que $\int_\Omega |f(x)|\,\mathrm{d}\mu(x) < +\infty$.

De cette discution, il est clair que l'ensemble *dénombrable*

$$\mathcal{D} = \{f_1 - f_2 + i(f_3 - f_4), f_1, f_2, f_3, f_4 \in \mathcal{D}_0 \text{ avec } f_1, f_2 \text{ et } f_3, f_4 \text{ à supports disjoints}\}$$

a la propriété suivante: soit f une fonction intégrable, alors pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $f_\varepsilon = f_\varepsilon^1 - f_\varepsilon^2 + i(f_\varepsilon^3 - f_\varepsilon^4) \in \mathcal{D}$ tel que

$$\int_\Omega |f - f_\varepsilon|\,\mathrm{d}\mu(x) \leqslant \varepsilon.$$

En d'autres termes, $\mathcal{D}$ est dénombrable dense dans $L^1(\Omega, \mu)$.

20 min

4.3. **Sepatabilité de $L^p(\Omega, \mu)$ pour $1 \leqslant p < \infty$.** Le cas $1 < p < +\infty$ requière un peu plus de travail. Fixons $f \in L^p(\Omega, \mu)$, et $\varepsilon > 0$. Écrivons $f = f_1 - f_2 + i(f_3 - f_4)$ avec $f_i \geqslant 0$ et notons que $f_i \leqslant |f|$ donc chaque $f_i \in L^p(\Omega, \mu)$. De plus, si pour $\varepsilon > 0$ on troueve $f_\varepsilon^{(i)} \in \mathcal{S}_0$ tels que $\left\|f_i - f_\varepsilon^{(i)}\right\|_p \leqslant \varepsilon$ alors en posant $f_\varepsilon = f_\varepsilon^{(1)} - f_\varepsilon^{(2)} + i(f_\varepsilon^{(3)} - f_\varepsilon^{(4)})$, on a $\|f - f_\varepsilon\|_p \leqslant 4\varepsilon$. Il suffit donc de supposer que $f \geqslant 0$.

Ensuite, soit $f_n = \mathbf{1}_{f \leqslant n} f$ et remarquons que $f_n \to f$ presque partout et que $0 \leqslant f_n \leqslant f$ donc $f_n \to f$ in $L^p(\Omega, \mu)$. Notons aussi que $f_n \leqslant n$ donc f_n est bornée.† Il existe donc N tel que $\|f - f_N\|_p \leqslant \varepsilon$. Ainsi, quitte à remplacer f par f_N on peut supposer que f est borné par une constante N.

Soit maintenant (Ω_n) une suite croissante de parties de Ω de meure finie telles que $\bigcup \Omega_n = \Omega$. Posons $f_n = \mathbf{1}_{\Omega_n} f_N$ de sorte $f_n \to f$ presque partout et $0 \leqslant f_n \leqslant f$ donc $f_n \to$ dans $L^p(\Omega, \mu)$. On peut donc supposer que

$$f \text{ est positive, bornée par } N \text{ et à support } \tilde{\Omega} \text{ de mesure finie } \nu = \mu(\tilde{\Omega}).$$

†On a ici montré que, $L^\infty(\Omega, \mu) \cap L^p(\Omega, \mu)$ est dense dans $L^p(\Omega, \mu)$.

Écrivons alors $[0,N] \subset \bigcup_{j=0}^{M} I_j$ avec $I_j = [(j/\nu)^{1/p}\varepsilon, \big((j+1)/\nu\big)^{1/p}\varepsilon[$. ce choix est dicté par la propriété suivante:

$$\big((j+1)/\nu\big)^{1/p}\varepsilon - (j/\nu)^{1/p}\varepsilon \leqslant \big((1+j)^{1/p} - j^{1/p}\big)\varepsilon/\nu^{1/p} \leqslant \varepsilon/\nu^{1/p}$$

puisque $1 \leqslant p < +\infty$ donc $0 < 1/p \leqslant 1$. Pour chaque j, choisissons $a_j \in I_j \cap \mathbb{Q}$. Posons $B_j = f^{-1}(I_j)$ et remarquons que les B_j sont disjoints et recouvrent $\tilde{\Omega}$. De plus, pour $x \in B_j$

$$-\varepsilon/\nu^{1/p} \leqslant \big(j/\nu\big)^{1/p}\varepsilon - a_j \leqslant f(x) - a_j \leqslant \big((j+1)/\nu\big)^{1/p}\varepsilon - a_j \leqslant \varepsilon/\nu^{1/p}.$$

En d'autres termes, pour $x \in B_j$, $|f(x) - a_j|^p \leqslant \varepsilon/\nu^{1/p}$. Comme les B_j's cover the support de f, pour x tel que $f(x) \neq 0$, il existe j tel que $x \in B_j$ et alors

$$|f(x) - a_j|^p = |f(x)\mathbf{1}_{B_j}(x) - a_j\mathbf{1}_{B_j}(x)|^p \leqslant \varepsilon^p/\nu\mathbf{1}_{B_j}(x).$$

Ensuite, remarquons que si u et v ont des supports disjoints, alors $|u+v|^p = |u|^p + |v|^p$. Ainsi, les B_j étant disjoints, on a pour tout x tel que $f(x) \neq 0$

$$\begin{aligned}
|\sum_{j=1}^{N} f(x)\mathbf{1}_{B_j}(x) - \sum_{j=1}^{N} a_j\mathbf{1}_{B_j}(x)|^p &= \sum_{j=1}^{N} |f(x)\mathbf{1}_{B_j}(x) - a_j\mathbf{1}_{B_j}(x)|^p \\
&\leqslant \sum_{j=1}^{N} \frac{\varepsilon^p}{\nu}\mathbf{1}_{B_j}(x) \\
&= \frac{\varepsilon^p}{\nu}\mathbf{1}_{\tilde{\Omega}}(x).
\end{aligned}$$

Finallement, ceci se réduit à $0 = 0$ lorsque $f(x) = 0$. Posons alors $\tilde{f} = \sum_{j=1}^{N} a_j\mathbf{1}_{B_j}$ et intégrons sur Ω pour obtenir

$$\int_\Omega |f(x) - \tilde{f}(x)|^p \,\mathrm{d}\mu(x) \leqslant \frac{\varepsilon^p}{\nu}\int_\Omega \mathbf{1}_{\tilde{\Omega}}(x)\,\mathrm{d}\mu(x) = \varepsilon^p$$

par définition de ν.

Ainsi, en perdant un ε, on peut remplacer f par $\tilde{f}$, c'est-à-dire supposer que

f est une fonction simple à coefficents rationnels positifs, bornée par N et de support un ensemble de mesure fini $f = \sum_{j=1}^{M} a_j\mathbf{1}_{B_j}$.

La dernière étape consiste ensuite à remplacer les B_j par des ensembles $A_j \in \tilde{\mathcal{B}}$ avec $\mu(B_j \backslash A_j) < (\varepsilon/NM)^p$ et de poser

$$f_\varepsilon = \sum_{j=1}^{M} a_j\mathbf{1}_{A_j}$$

de sorte que $f - f_\varepsilon = \sum_{j=1}^{M} a_j\mathbf{1}_{B_j\backslash A_j}$. Comme $0 \leqslant a_j \leqslant N$ on a

$$\|f - f_\varepsilon\|_p \leqslant \sum_{j=1}^{M} a_j\big\|\mathbf{1}_{B_j\backslash A_j}\big\|_p \leqslant NM \max \mu(B_j\backslash A_j)^{1/p} \leqslant \varepsilon.$$

Ceci donne bien la densitée cherchée.

30 min

5. Continuité des translations dans $L^p(\mathbb{R}^d)$

Cette section est essentielle pour la suite, tant pour le résultat que pour le raisonnement développé ici.

Pour $a \in \mathbb{R}^d$, on defini l'opérateur de *translation* τ_a agissant sur $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$ par $\tau_a f(x) = f(x-a)$. Bien entendu, pour $1 \leqslant p \leqslant +\infty$ ceci est une opérateur linéaire borné $L^p(\mathbb{R}^d) \to L^p(\mathbb{R}^d)$ avec $\|\tau_a f\|_p = \|f\|_p$.

Nous nous intéressons ici à la continuité des translations par rapport au paramètre a:

Proposition 5.1. *Soit $1 \leqslant p < \infty$ et $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$ l'application $a \mapsto \tau_a f$ est continuoe $\mathbb{R}^d \to L^p(\mathbb{R}^d)$. Plus précisément*

$$\text{pour } f \in L^p(\mathbb{R}^d) \text{ fixé, et } a_0 \in \mathbb{R}^d,\ \|\tau_a f - \tau_{a_0} f\|_p \to 0 \text{ quand } a \to a_0.$$

Remarque 5.2. Il est important de noter que ceci est faux pour $p = +\infty$ (sauf si f est uniformément continue, par exemple si $f \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R}^d)$). Nous laissons ce point en exercice qui devrat être évident après l'étape 1.

Démonstration. Tout d'abord $\|\tau_a f - \tau_{a_0} f\|_p = \|\tau_{a-a_0} f - f\|_p$ il suffit donc de considérer $a_0 = 0$.

Étape 1. *La propriété est vraie si $f = \mathbf{1}_E$ pour E un ensemble de mesure finie.*

Quand $d = 1$ et $f = \mathbf{1}_{[\alpha,\beta]}$, $\tau_a f = \mathbf{1}_{[\alpha+a,\beta+a]}$, de sorte que,

$$\tau_a f - f = \begin{cases} \mathbf{1}_{[\beta,\beta+a]} - \mathbf{1}_{[\alpha,\alpha+]a} & \text{if } a \geqslant 0 \\ -\mathbf{1}_{[\beta+a,\beta]} + \mathbf{1}_{[\alpha+a,\alpha]} & \text{if } a \leqslant 0 \end{cases}.$$

Ainsi $\|\tau_a f - f\|_p = (2a)^{1/p} \to 0$ quand $a \to 0$.

Maintenant, si $Q \in \mathbb{R}^d$ est un cube $Q = \prod_{j=1}^d [a_j, b_j]$ et $f = \mathbf{1}_Q$ le résultat suit directement. De plus, si $U = \bigcup_{j=1}^N Q_j$ avec les Q_j des cubes disjoints et $f = \mathbf{1}_U$ alors $f = \sum_{j=1}^N \mathbf{1}_{Q_j}$ donc $\|\tau_a f - f\|_p \leqslant \sum_{j=1}^N \|\tau_a \mathbf{1}_{Q_j} - \mathbf{1}_{Q_j}\|_p \to 0$ quand $a \to 0$.

Si U est un ensemble ouvert borné, pour tout $\varepsilon > 0$ il existe une famille de cubes disjoints $Q_j \subset U$ telle que $|U \setminus \bigcup_{j=1}^N Q_j| \leqslant \varepsilon$. Alors, pour $f = \mathbf{1}_U$ et $f_\varepsilon = \sum_{j=1}^N \mathbf{1}_{Q_j}$, on a

$$\|\tau_a f - \tau_a f_\varepsilon\|_p = \|f_\varepsilon - f\|_p = |U \setminus \bigcup_{j=1}^N Q_j|^{1/p}.$$

On en déduit que

$$\|\tau_a f - f\|_p \leqslant \|\tau_a f - \tau_a f_\varepsilon\|_p + \|\tau_a f_\varepsilon - f_\varepsilon\|_p + \|f_\varepsilon - f\|_p \leqslant 3\varepsilon^{1/p}$$

pour peut que a soit assez petit. Nous venons donc de démontrer le r'esultat pour ces f.

Finallement, soit E un ensemble de mesure de Lebesgue finie et $\varepsilon > 0$. Il existe un ouvert U tel que $|E \Delta U| \leqslant \varepsilon$. Soit $f = \mathbf{1}_E$ et $f_\varepsilon = \mathbf{1}_U$, alors $|f - f_\varepsilon| = \mathbf{1}_{E\Delta U}$, donc $\|f - f_\varepsilon\|_p = |E\Delta U|^{1/p} \leqslant \varepsilon^{1/p}$ et on conclue comme précédemment.

Étape 2. *Conclusion.*

Tout d'abord, par linéarité, si f est une fonction simple, $f = \sum_{j=1}^N c_j \mathbf{1}_{E_j}$, alors

$$\|\tau_a f - f\|_p \leqslant \sum_{j=1}^N |c_j| \|\tau_a \mathbf{1}_{E_j} - \mathbf{1}_{E_j}\|_p \to 0$$

quand $a \to 0$.

Enfin, si $f \in L^p$ et $\varepsilon > 0$, il existe une fonction simple f_ε telle que $\|f - f_\varepsilon\|_p \leqslant \varepsilon$. On conclue comme précédemment. $\square$

6. Le théorème de projection

30min

Les projections jouent un rôle essentiel dans les espaces de Hilbert. Il n'y a malheureusement rien de tel dans un espace de Banach général, mais une version de ce théorème est valide dans les espaces L^p:

Théorème 6.1. *Soit $1 \leqslant p < +\infty$ et soit E un sous-espace vectoriel fermé de $L^p(\Omega, \mu)$. Pour $f \in L^p(\Omega, \mu)$, soit $d(f, E) = \inf_{g \in E} \|f - g\|_p$. Alors il existe g_0 tel que $d(f, E) = \|f - g_0\|_p$.*

Remarque 6.2. Notons que si $\|g\|_p > 2\|f\|_p$ alors

$$\|f - g\|_p \geqslant \|g\|_p - \|f\|_p > \|f\|_p = \|f - 0\|_p \geqslant d(f, E)$$

puisque $0 \in E$. Ainsi $d(f, E) = \inf\{\|f - g\|_p : g \in E, \|g\|_p \leqslant 2\|f\|_p\}$.

Si E est un espace de dimension finie, alors l'ensemble $\{g \in E, \|g\|_p \leqslant 2\|f\|_p\}$ est compact puisque fermé et borné. Comme $g \to \|f - g\|_p$ est continue, l'existence de g_0 est immédiate.

Si E est de dimension infini, cet argument n'est plus valide puisque les ensembles fermés bornés ne sont plus forcément compacts. En fait, le fait que toute partie fermée bornée d'un espace de Banach soit compacte implique que celui-ci soit de dimension finie (voir cours d'analyse fonctionnelle).

Démonstration lorsque $p \geqslant 2$. Commençons par rappeler que lorsque $p = 2$ ce théorème résulte de l'identité du parallélogramme

$$\|u - v\|_2^2 + \|u + v\|_2^2 = 2\|u\|_2^2 + 2\|v\|_2^2.$$

Soit alors $g_n \in E$ une suite telle que $\|f - g_n\|_2 \to d(f, E)$. L'identité du parallélogramme appliquée à $u = \frac{f - g_m}{2}$, $v = \frac{f - g_n}{2}$ donne

$$\|g_n - g_m\|_2^2 = 4\left(\frac{1}{2}\|f - g_m\|_2^2 + \frac{1}{2}\|f - g_n\|_2^2 - \left\|\frac{g_n + g_m}{2} - f\right\|_2^2\right).$$

Comme $\frac{g_n + g_m}{2} \in E$, $\left\|\frac{g_n + g_m}{2} - f\right\|_2 \geqslant d(f, E)$ donc

$$\|g_n - g_m\|_2^2 \leqslant 2(\|f - g_m\|_2^2 - d(f, E)^2 + \|f - g_n\|_2^2 - d(f, E)^2)$$

et ainsi (g_n) est de Cauchy. Mais alors (g_n) est convergente et E étant fermé, sa limite $g_0 \in E$. Par continuité de la norme $\|f - g_n\|_2 \to \|f - g_0\|_2$ et cette limite est bien le g_0 cherché.

Lorsque $p > 2$, l'identité du parallélogramme n'est plus vérifiée (elle caractérise les espaces de Hilbert). Toutefois, elle est encore valable ponctuellement: si $f, g \in L^p(\Omega, \mu)$ et $x \in \Omega$ alors

$$|f(x) - g(x)|^2 + |f(x) + g(x)|^2 = 2|f(x)|^2 + 2|g(x)|^2.$$

Comme $p > 2$, $r := p/2 > 1$. Mais, pour $a, b > 0$

$$a^r + b^r \leqslant (a + b)^r \leqslant 2^{r-1}(a^r + b^r). \tag{6.8}$$

On en déduit que

$$\begin{aligned}|f(x)-g(x)|^p+|f(x)+g(x)|^p &= \big(|f(x)-g(x)|^2\big)^r+\big(|f(x)+g(x)|^2\big)^r\\ &\leqslant \big(|f(x)-g(x)|^2+|f(x)+g(x)|^2\big)^r\\ &= 2^r\big(|f(x)|^2+|g(x)|^2\big)^r\leqslant 2^{2r-1}\big(|f(x)|^{2r}+|g(x)|^{2r}\big)\\ &= 2^{p-1}\big(|f(x)|^p+|g(x)|^p\big).\end{aligned}$$

En fait, ceci n'est valable que si $|f(x)|$ et $|g(x)|$ sont finis, mais l'hypothèse $f,g\in L^p$ implique que ceci est le cas pour presque tout x.

Intégrons alors cette inégalité par rapport à μ pour obtenir

$$\|f-g\|_p^p+\|f+g\|_p^p\leqslant 2^{p-1}\big(\|f\|_p^p+\|g|_p^p\big).$$

On conclue alors comme dans le cas $p=2$: on considère une suite $g_n\in E$ telle que $\|g_n-f\|_p\to d(f,E)$ et on remplace f par $f-g_n$, g par $f-g_m$ dans cette inégalité. Cela conduit à

$$\begin{aligned}\|g_n-g_m\|_p^p &\leqslant 2^{p-1}\big(\|f-g_n\|_p^p+\|f-g_m\|_p^p\big)-\|2f-g_n-g_m\|_p^p\\ &\leqslant 2^{p-1}\big(\|f-g_n\|_p^p+\|f-g_m\|_p^p-2d(f,E)\big).\end{aligned}$$

Ainsi g_n est de Cauchy donc converge. Comme E est fermé, sa limite est dans E et est le projection cherchée. □

Démonstration de (6.8). Ré-écrivons $a^r+b^r\leqslant(a+b)^r$ sous la forme $1+(b/a)^r\leqslant(1+b/a)^r$, ou encore, en posant $t=b/a$, $1+t^r\leqslant(1+t)^r$ pour tout $t>0$. Posons $f(t)=(1+t)^r-(1+t^r)$ pour $t\geqslant 0$. Alors $f(0)=0$ et $f'(t)=r\big((1+t)^{r-1}-t^{r-1}\big)\geqslant 0$ puisque $r\geqslant 1$ (donc s^{r-1} est croissante).

On utilise la convexité de $t\to t^r$ pour l'autre inégalité:

$$(a+b)^r=2^r\left(\frac{a+b}{2}\right)^r\leqslant 2^r\frac{a^r+b^r}{2}$$

comme annoncé. □

La démonstration du cas $p<2$ est plus complexe et requière l'inégalité de Hammer

$$\big|\|f+g\|_p+\|f-g\|_p\big|^p+\big|\|f+g\|_p-\|f-g\|_p\big|^p\leqslant 2^p\big(\|f\|_p^p+\|g\|_p^p\big)$$

qui est délicate à établir. Nous n'allons pas utiliser ce cas et ne donnerons pas la démonstration ici.

7. Dualité

La dualité est une des propriétés clé de l'analyse. Notre but est de déterminer le dual des espaces $L^p(\Omega,\mu)$, c'est-à-dire de déterminer *toutes* les applications linéaires continues de $L^p(\Omega,\mu)\to\mathbb{C}$.

Notons que, grâce à l'inégalité de Hölde, il est facile de construire des formes linéaires continues sur $L^p(\Omega,\mu)$:

Lemme 7.1. *Soit $1\leqslant p\leqslant+\infty$ et p' tel que $\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1$. À $g\in L^{p'}(\Omega,\mu)$ on associe l'application*

$$\Phi_g(f)=\int_\Omega f(x)g(x)\,d\mu(x).$$

Alors Φ_g est une forme linéaire continue sur $L^p(\Omega,\mu)$. De plus

$$\|\Phi_g\| := \sup_{\|f\|_p \leqslant 1} \int_\Omega f(x)g(x)\,d\mu(x) = \|g\|_{p'}.$$

Proof. L'inégalité de Hölder montre que $\Phi_g(f)$ est bien définie pour $f \in L^p(\Omega,\mu)$. Il est alors évident que Φ_g est linéaire et l''inégalité de Hölder montre que cette forme linéaire est continue avec $\|\Phi_g\| \leqslant \|g\|_{p'}$. Enfin, en utilisant le cas d'égalité on obtient bien que $\|\Phi_g\| = \|g\|_{p'}$. $\square$

La but de cette section est de démontrer la réciproque de ce lemme (sauf pour $p = +\infty$ pour lequel l'espace dual est *beaucoup* plus compliqué).

Théorème 7.2. *Soit $(\Omega,\mathcal{B},\mu)$ une mesure σ-finie. Soit $1 \leqslant p < +\infty$ et p' tel que $\frac{1}{p}+\frac{1}{p'} = 1$. Soit $\Phi \in (L^p)'$ i.e. une forme linéaire sur $L^p(\Omega,\mu)$. Alors il existe un unique $g \in L^{p'}(\Omega,\mu)$ tel que $\Phi = \Phi_g$, c'est-à-dire*

$$\Phi(f) = \int_\Omega f(x)g(x)\,d\mu(x).$$

pour tout $f \in L^p(\Omega,\mu)$. En particulier $\|\Phi\| = \|g\|_{p'}$.

Remarque 7.3. Insistons sur le fait que pour $p = +\infty$ ce résultat est faux. Le dual de $L^\infty(\Omega,\mu)$ (sauf quand Ω est fini) est un espace bien plus difficile à décrire que $L^1(\Omega,\mu)$.

Commençons par le plus simple.

Démonstration de l'unicité de g. Soient donc $g_1, g_2 \in L^{p'}$ tels que $\Phi_{g_1} = \Phi_{g_2}$. En d'autres termes, en posant $g = g_1 - g_2$, pour tout $f \in L^p$, $\Phi_g(f) = 0$.

Si $p > 1$, alors $p' < +\infty$, on pose $f(x) = \begin{cases} |g(x)|^{p'-2}\overline{g(x)} & \text{if } g(x) \neq 0 \\ 0 & \text{if } g(x) = 0 \end{cases}$. Comme $|f|^p = (|g|^{p'-1})^p = |g|^{p'}$ puisque $p = \frac{p'}{p'-1}$ quand $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$, on a bien $f \in L^p$. Ensuite,

$$0 = \Phi_g(f) = \int_\Omega f(x)g(x)\,\mathrm{d}\mu(x) = \int_\Omega |g(x)|^{p'-2}\overline{g(x)}g(x)\,\mathrm{d}\mu(x) = \|g\|_{p'}^{p'}$$

donc $g = 0$.

Si $p = 1$, une petite modification s'impose. On écrit $\Omega = \bigcup_{n\geqslant 1}\Omega_n$ avec $\mu(\Omega_n) < +\infty$ et $g(x) = e^{i\theta(x)}|g(x)|$. Alors $f_n = e^{-i\theta}\mathbf{\Omega_n} \in L^1$ et

$$0 = \Phi_g(f_n) = \int_\Omega f_n(x)g(x)\,\mathrm{d}\mu(x) = \int_{\Omega_n} |g(x)|\,\mathrm{d}\mu(x).$$

Ainsi $g = 0$ μ-presque partout sur Ω_n *i.e.* il existe $E_n \subset \Omega_n$ tel que $g = 0$ sur $\Omega_n \backslash E_n$. Ainsi $g = 0$ sur $\bigcup_{n\geqslant 1}\Omega_n \backslash \bigcup_{n\geqslant 1} E_n = \Omega \backslash \bigcup_{n\geqslant 1} E_n$. Comme $\bigcup_{n\geqslant 1} E_n$ est une réunion dénombrable d'ensembles négligeables, c'est un ensemble de mesure nulle. Ainsi $g = 0$ μ-presque partout. $\square$

En premier lieu, rappelons que, pour $p = 2$, $L^2(\Omega,\mu)$ est un espae de Hilbert et que, d'après le théorème de Riesz, $L^2(\Omega,\mu)$ est son propre dual. Plus précisément, pour toute application linéaire Φ, il existe un unique $h \in L^2(\Omega,\mu)$ tel que, pour tout $f \in L^2(\Omega,\mu)$

$$\Phi(f) = \langle f, h\rangle := \int_\Omega f(x)\overline{h(x)}\,\mathrm{d}\mu(x) = \Phi_g(f)$$

avec $g = \bar{h}$. Nous allons maintenant utiliser ce fait pour démontrer le théorème dans le cas $1 \leqslant p < 2$.

Nous donnerons ensuite une autre démonstration, basée sur le théorème de projection et qui s'inspire directement de la démonstration classique du théorème de Riesz.

Démonstration dans le cas $1 \leqslant p < 2$. Soit p' l'indice *dual*, $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ et remarquons que $p' > 2$. Soit s donné par $\frac{p}{2} + \frac{1}{s} = 1$ *i.e.* $s = \frac{2}{2-p}$ et $r = ps$. Le choix de r et s a été guidé pour que l'inégalité de Hölder se lise

$$(7.9) \quad \int_\Omega |f(x)|^p |g(x)|^p \,\mathrm{d}\mu(x) \leqslant \left(\int_\Omega |f(x)|^2 \,\mathrm{d}\mu(x)\right)^{p/2} \left(\int_\Omega |g(x)|^{ps} \,\mathrm{d}\mu(x)\right)^{1/s} = \|f\|_2^p \|g\|_r^p.$$

Écrivons alors $\Omega = \bigcup_{n \geqslant 2} \Omega_n$ avec $\mu(\Omega_n) < +\infty$ et les Ω_n 2 à 2 disjoints. Définissons w par

$$w(x) = \sum_{n \geqslant 1} \alpha_n \mathbf{1}_{\Omega_n}$$

où les $\alpha_n > 0$ sont choisis pour que

(i) pour tout n, $\alpha_n > 0$ et $\alpha_{n+1} \leqslant \alpha_n$,
(ii) $\|w\|_r^r = \sum_{n \geqslant 1} \alpha_n^r \mu(\Omega_n) < +\infty$.

Il résulte de (7.9) que, pour tout $f \in L^2(\Omega, \mu)$, $fw \in L^p(\Omega, \mu)$ avec $\|fw\|_p \leqslant \|w\|_r \|f\|_2$. Ainsi, l'operateur $T_w : L^2 \to L^p$ défini par $T_w f = wf$ est borné.

Maintenant, soit $\Phi \in (L^p)'$, une forme linéaire continue sur $L^p(\Omega, \mu)$. Alors ΦT_w est une forme linéaire continue sur $L^2(\Omega, \mu)$. D'après le théorème de Riesz, il existe alors $G \in L^2(\Omega, \mu)$ tel que $\Phi T_w = \Phi_G$: *pour tout* $f \in L^2(\Omega, \mu)$,

$$\Phi T_w f = \Phi(fw) = \int_\Omega f(x) G(x) \,\mathrm{d}\mu(x).$$

Considérons alors l'ensemble $\mathcal{S} = \{\varphi \in L^p(\Omega, \mu) : \varphi/w \in L^2(\Omega, \mu)\}$. Notons que $\mathcal{S}$ est dense dans $L^p(\Omega, \mu)$. En effet, si $f \in L^p(\Omega, \mu)$ et $\varepsilon > 0$, il existe N tel qu'en écrivant $\Phi_N = \bigcup_{n \leqslant N} \Omega_n$ $f_N = f \mathbf{1}_{\Phi_N} \mathbf{1}_{|f| \leqslant N}$, et $\|f - f_N\|_p \leqslant \varepsilon$ (notez qie $f_N \to f$ p.p. et que $|f_N| \leqslant f$ donc $f_N \to f$ dans L^p). De plus, pour $x \in \Phi_N$, il existe $n \leqslant N$ tel que $x \in \Omega_n$. Ainsi $w(x) = \alpha_n \geqslant \alpha_N$ puisque les α_n ont été choisis décroissants. Par suite

$$\frac{|f_N(x)|}{w(x)} \leqslant \begin{cases} 0 & \text{si } x \notin \Phi_N \\ \frac{N}{\alpha_N} & \text{si } x \in \Phi_N \end{cases}.$$

Ainsi f_N/w est borné avec un support de mesure fini donc dans $L^2(\Omega, \mu)$ *i.e.* $f_N \in \mathcal{S}$.

Mais alors, pour $\varphi \in \mathcal{S}$, on peut écrire $\varphi = fw$ avec $f = \varphi/w \in L^2$. Dooonc

$$\Phi(\varphi) = \Phi(fw) = \int_\Omega f(x) G(x) \,\mathrm{d}\mu(x) = \int_\Omega \varphi(x) \frac{G(x)}{w(x)} \,\mathrm{d}\mu(x) = \Phi_g(\varphi)$$

avec $g := G/w$. Il nous reste à démontrer que $g \in L^{p'}(\Omega, \mu)$. En effet, si c'est le cas Φ_g est une forme linéaire continue sur L^p. On a $\Phi = \Phi_g$ sur $\mathcal{S}$ qui est dense dans L^p. Par continuité de Φ et Φ_g, on aura donc $\Phi = \Phi_g$ sur tout L^p, qui est exactemetn ce que nous souhaitons démontrer..

Montrons donc que $g \in L^{p'}(\Omega, \mu)$. Pour cela, distinguons deux cas:

Commençons par le cas $1 < p < 2$. Posons $\kappa = \dfrac{2-p}{p-1}$ et remarquons que $\kappa + 2 = p(\kappa+1) = p' := \dfrac{p}{p-1}$. Considérons alors $\varphi_N = \overline{g}|g|^\kappa \mathbf{1}_{|g|\leqslant N}\mathbf{1}_{\Phi_N}$ et observons que $|\varphi_N| = |g|^{\kappa+1}\mathbf{1}_{|g|\leqslant N}\mathbf{1}_{\Phi_N}$. En particulier φ_N est borné et a un support de mesure fini donc $\varphi_n \in L^p(\Omega,\mu)$ et, sur son support, $w \geqslant \alpha_N$ donc $|\varphi_N/w| \leqslant |\varphi_N|/\alpha_N \in L^2(\Omega,\mu)$. Ainsi, $\varphi_N \in \mathcal{S}$. Mais alors

$$\begin{aligned}\Phi(\varphi_N) = \Phi_g(\varphi_N) &= \int_\Omega \varphi_N(x)g(x)\,\mathrm{d}\mu(x) = \int_\Omega |g(x)|^{\kappa+2}\mathbf{1}_{|g|\leqslant N}(x)\mathbf{1}_{\Phi_N}(x)\,\mathrm{d}\mu(x)\\ &= \int_\Omega |g(x)|^{p'}\mathbf{1}_{|g|\leqslant N}(x)\mathbf{1}_{\Phi_N}(x)\,\mathrm{d}\mu(x).\end{aligned}$$

D'autre part, Φ est continue sur $L^p(\Omega,\mu)$ donc, pour tout φ, $|\Phi(\varphi)| \leqslant \|\Phi\|\|\varphi\|_p$, en particulier

$$\begin{aligned}|\Phi(\varphi_N)| &\leqslant \|\Phi\|\|\varphi_N\|_p = \|\Phi\|\left(\int_\Omega |g|^{p\kappa}(x)\mathbf{1}_{|g|\leqslant N}(x)\mathbf{1}_{\Phi_N}(x)\,\mathrm{d}\mu(x)\right)^{1/p}\\ &= \|\Phi\|\left(\int_\Omega |g|^{p'}(x)\mathbf{1}_{|g|\leqslant N}(x)\mathbf{1}_{\Phi_N}(x)\,\mathrm{d}\mu(x)\right)^{1/p}.\end{aligned}$$

Combiner les deux inégalté entraine que, pour tout N,

$$\left(\int_\Omega |g|^{p'}(x)\mathbf{1}_{|g|\leqslant N}(x)\mathbf{1}_{\Phi_N}(x)\,\mathrm{d}\mu(x)\right)^{1/p'} \leqslant \|\Phi\|$$

On fait ensuite N et, grâce au théorème de convergence monotone, $\|g\|_{p'} \leqslant C$ donc $g \in L^{p'}(\Omega,\mu)$ comme annoncé.

Pour $p = 1$ il faut un peu modifier l'argument. On écrit $g = e^{i\theta}|g|$ et on considère $\varphi_N = e^{-i\theta}\mathbf{1}_{|g|>\|\Phi\|+1/N}\mathbf{1}_{\Phi_N}$. Comme précédemment $\varphi_N \in \mathcal{S}$. Mais ensuite

$$\begin{aligned}\Phi(\varphi_N) = \Phi_g(\varphi_N) = \int_\Omega \varphi_N(x)g(x)\,\mathrm{d}\mu(x) &= \int_\Omega |g(x)|\mathbf{1}_{|g|>\|\Phi\|+1/N}\mathbf{1}_{\Phi_N}\,\mathrm{d}\mu(x)\\ &\geqslant (\|\Phi\|+1/N)\,\mu(\{|g|>\|\Phi\|+1/N\}\cap\Phi_N).\end{aligned}$$

D'autre part

$$\begin{aligned}|\Phi(\varphi_N)| \leqslant \|\Phi\|\|\varphi_N\|_1 &= \|\Phi\|\int_\Omega \mathbf{1}_{|g|>\|\Phi\|+1/N}\mathbf{1}_{\Phi_N}\,\mathrm{d}\mu(x)\\ &= \|\Phi\|\,\mu(\{|g|>\|\Phi\|+1/N\}\cap\Phi_N).\end{aligned}$$

Combinons les deux pour obtenir $|\{|g| > \|\Phi\|+1/N\}\cap\Phi_N| = 0$. Finallement, comme $\{|g| > \|\Phi\|\} = \bigcup_{N\geqslant 1}\{|g| > \|\Phi\|+1/N\}\cap\Phi_N$ on obtient $|g| \leqslant \|\Phi\|$ presque partout. □

Il nous reste donc à traiter le cas $p > 2$. La démonstration précédente ne peut pas être adaptée. On va donc modifier la démonstration du cas $p = 2$ basée sur le théorème de projection. Il se trouve que la même démonstration marche aussi pour $1 < p < 2$ mais, dans ce cas, le théorème de projection est plus difficile (nous ne l'avons d'ailleurs pas démontré).

Avant de faire cela, nous aurons besoin d'un lemme assez simple

Lemme 7.4. *Soit* (Ω,μ) *un espace mesuré et* $1<p<+\infty$. *Soient* $f,g\in L^p(\Omega,\mu)$. *Pour* $t\in\mathbb{R}$, *définissons*
$$\mathcal{N}(t)=\|f-tg\|_p^p.$$
Alors Φ *est dérivable en* 0 *de dérivée*
$$\mathcal{N}'(0)=p\int_\Omega |f(t)|^{p-2}Re\big(f(t)\overline{g(t)}\big)\,\mathrm{d}\mu(t).$$

Remarque 7.5. On dit que la norme est *gateau*-différentiable.

Notez que $2|f(t)|^{p-2}\mathrm{Re}\big(f(t)\overline{g(t)}\big)=|f(t)|^{p-2}f(t)\overline{g(t)}+|f(t)|^{p-2}\overline{f(t)}g(t)\in L^1$ puisque $g\in L^p$ et $|f(t)|^{p-2}f(t),|f(t)|^{p-2}\overline{f(t)}\in L^{p'}$ (avec Hölder).

Démonstration du lemme. Le point de départ est le fait suivant sur les nombres complexes, si $a,b\in\mathbb{C}$ alors
$$\lim_{t\to0}\frac{|a+tb|^p-|a|^p}{t}=\frac{p}{2}|a|^{p-2}(\bar a\,b+a\,\bar b).$$
Lorsque $a=0$, le membre de gauche est interpété comme étant 0 (ce qui est naturel par prolongement par continuité) et cette identité est triviale. Si $a\neq0$, on écrit
$$\varphi(t):=|a+tb|^p=(|a+tb|^2)^{p/2}=\big(|a|^2+2t(\bar a\,b+a\,\bar b)+t^2|b|^2\big)^{p/2}$$
et on dérive pour trouver
$$\begin{aligned}\varphi'(t)&=\frac{p}{2}\big(|a|^2+t(\bar a\,b+a\,\bar b)+t^2|b|^2\big)^{p/2-1}\big(\bar a\,b+a\,\bar b+2t|b|^2\big)\\&=\frac{p}{2}|a+tb|^{p-2}\big(\bar a\,b+a\,\bar b+2t|b|^2\big)\\&\to\frac{p}{2}|a+tb|^{p-2}(\bar a\,b+a\,\bar b)\qquad\text{quand } t\to0\end{aligned}$$
Ainsi φ est dérivable en 0 et
$$\lim_{t\to0}\frac{|a+tb|^p-|a|^p}{t}=\varphi'(0)=\frac{p}{2}|a|^{p-2}(\bar a\,b+a\,\bar b).$$

Ensuite, on remarque que $s\to|s|^p$ est convexe donc
$$|f+tg|^p=|(1-t)f+t(f+g)|^p\leqslant(1-t)|f|^p+t|f+g|^p$$
et
$$|f|^p=\left|\frac{1}{1+t}(f+tg)+\frac{t}{1+t}(f-g)\right|^p\leqslant\frac{1}{1+t}|f+tg|^p+\frac{t}{1+t}|f-g|^p$$
d'où
$$|f|^p-|f-g|^p\leqslant\frac{|f+tg|^p-|f|^p}{t}\leqslant|f+g|^p-|f|^p$$
donc
$$\left|\frac{|f+tg|^p-|f|^p}{t}\right|\leqslant|f|^p+|f+g|^p+|f-g|^p\in L^1$$

On peut donc appliquer le théorème de covnergence dominée et en déduire que

$$\begin{aligned}
\mathcal{N}'(0) &= \lim_{t\to 0}\frac{\mathcal{N}(t)-\mathcal{N}(0)}{t} = \lim_{t\to 0}\int_\Omega \frac{|f(x)+tg(x)|^p-|f(x)|^p}{t}\,\mathrm{d}\mu(x)\\
&= \int_\Omega \lim_{t\to 0}\frac{|f(x)+tg(x)|^p-|f(x)|^p}{t}\,\mathrm{d}\mu(x)\\
&= \frac{p}{2}\int_\Omega |f(t)|^{p-2}\big(f(t)\overline{g(t)}+\overline{f(t)}g(t)\big)\,\mathrm{d}\mu(t)
\end{aligned}$$

qui est bien l'expression annoncée. □

Nous pouvons maintenant démontrer que le dual de L^p est $L^{p'}$.

Démonstration du cas $1<p<\infty$ à l'aide du théorème de projection. Soit Φ une forme linéaire continue sur $L^p(\Omega,\mu)$. Nous cherchons $g\in L^{p'}(\Omega,\mu)$ tel que $\Phi=\Phi_g$. On peut supposer que $\Phi\neq 0$ puisqu'il suffit alors de prendre $g=0$. Il existe donc $f\in L^p(\Omega,\mu)$ avec $L(f)\neq 0$. Quitte à remplacer f par $f/L(f)$ on suppose alors que $L(f)=1$.

Soit $E=\ker\Phi=\Phi^{-1}(\{0\})$ qui est donc un sous-espace fermé de $L^p(\Omega,\mu)$. Il existe alors $g_0\in E$ tel que $\|f-g_0\|_p=d(f,E)$. Notons que $L(f-g_0)=L(f)-L(g_0)=1-0=1$ et que $\|f-g_0\|_p=\|(f-g_0)-0\|_p=d(f,E)$. On peut donc remplacer f par $f-g_0$ et supposer que 0 est la projection de f sur E: $L(f)=1$ et $\|f\|_p=d(f,E)$, soit, pour tout $g\in E$, $\|f\|_p\leqslant\|f-g\|_p$.

Fixons maintenant $g\in E$ et considérons

$$\mathcal{N}(t)=\int_\Omega |f(x)-tg(x)\,\mathrm{d}\mu(x)=\|f-tg\|_p^p.$$

Observe d'abord que

– comme $tg\in E$, $\mathcal{N}(t)=\|f-tg\|_p^p\geqslant\|f\|_p^p=\mathcal{N}(0)$. Donc $\mathcal{N}$ a un minimum en 0.

– d'après le lemme précédent, $\mathcal{N}$ est dérivable en 0 donc $\mathcal{N}'(0)=0$ et, d'après l'expression de $\mathcal{N}'(0)$,

$$\mathcal{N}'(0)=p\int_\Omega |f(x)|^{p-2}\Re\overline{f(x)}g(x)\,\mathrm{d}\mu(x)=0.$$

Nous venons donc de montrer que, pour tout $g\in L^p$, avec $L(g)=0$,

$$\Re\int_\Omega |f(x)|^{p-2}\overline{f(x)}g(x)\,\mathrm{d}\mu(x)=0.$$

Notons que, si $g\in L^p$ est tel que $L(g)=0$ alors $ig\in L^p$ et $L(ig)=iL(g)=0$ donc

$$\Re i\int_\Omega |f(x)|^{p-2}\overline{f(x)}g(x)\,\mathrm{d}\mu(x)=0.$$

En combinant les deux

$$\int_\Omega |f(x)|^{p-2}\overline{f(x)}g(x)\,\mathrm{d}\mu(x)=0.$$

Finalement, définissons $\tilde f(x)=|f(x)|^{p-2}\overline{f(x)}$ et remarquons que $|\tilde f|^{p'}=|f|^{(p-1)p'}=|f|^p$ donc $\tilde f\in L^{p'}$ avec $\left\|\tilde f\right\|_{p'}^{p'}=\|f\|_p^p$. Nous venons donc de montrer que *pour tout $g\in L^p(\Omega,\mu)$ tel que $L(g)=0$,*

$$\Phi_{\tilde f}(g)=\int_\Omega \tilde f(x)g(x)\,\mathrm{d}\mu(x)=0.$$

Soit maintenant $h \in L^p$ et $g = h - L(h)f \in L^p$. Remarquons que $L(g) = L(h) - L(h)L(f) = 0$ puisque $L(f) = 1$ et que $\Phi_{\tilde f}(f) = \|f\|_p^p$. Ainsi $\Phi_{\tilde f}(g) = 0$. Mais

$$0 = \Phi_{\tilde f}(g) = \Phi_{\tilde f}\big(h - L(h)f\big) = \Phi_{\tilde f}(h) - L(h)\Phi_{\tilde f}(f) = \Phi_{\tilde f}(h) - L(h)\|f\|_p^p.$$

Comme $L(f) = 1$, $f \neq 0$ donc $\|f\|_p^p \neq 0$ et on conclue que

$$L(h) = \frac{1}{\|f\|_p^p}\Phi_{\tilde f}(h) = \Phi_{\tilde f/\|f\|_p^p}(h)$$

qui est le résultat souhaité. □

Univ. Bordeaux, IMB, UMR 5251, F-33400 Talence, France. CNRS, IMB, UMR 5251, F-33400 Talence, France.

Email address: Philippe.Jaming@math.u-bordeaux.fr