ANALYSE: CONVERGENCE ET DUALITÉ

PHILIPPE JAMING

Transformée de Fourier

1. Théorie L^1

25 min

Définition 1.1. Pour $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ on défini la *transformée de Fourier* de f, qu'on notera $\hat{f}$ ou $\mathcal{F}[f]$, comme étant la fonction définie sur $\mathbb{R}^d$ par

$$\hat{f}(\xi) = \mathcal{F}[f](\xi) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x)e^{-2i\pi\langle x,\xi\rangle}\,\mathrm{d}x.$$

Notons que $|f(x)e^{-2i\pi\langle x,\xi\rangle}| = |f(x)|$ de sorte que la transformée de Fourier est bien définie. Il est également évident que c'est une application linéaire. Commençons par un exemple fondamental:

Exemple 1.2. Soient $a < b \in \mathbb{R}$ et $f = \mathbf{1}_{[a,b]}$. Alors pour $\xi \neq 0$,

$$\begin{aligned} \hat{f}(\xi) &= \int_a^b e^{-2i\pi x\xi}\,\mathrm{d}x = \frac{-1}{2i\pi\xi}\big(e^{-2i\pi b\xi} - e^{-2i\pi a\xi}\big) \\ &= \frac{e^{2i\pi\frac{a+b}{2}\xi}}{\pi\xi}\frac{e^{2i\pi\frac{b-a}{2}\xi} - e^{-2i\pi\frac{b-a}{2}\xi}}{2i} \\ &= e^{2i\pi\frac{a+b}{2}\xi}\frac{\sin\pi(b-a)\xi}{\pi\xi}. \end{aligned}$$

Pour $\xi = 0$, $\hat{f}(0) = \displaystyle\int_a^b \mathrm{d}x = b - a$.

Il est pratique d'introduire la fonction $\operatorname{sinc} t = \begin{cases} 1 & \text{si } t = 0 \\ \frac{\sin t}{t} & \text{si } t \neq 0 \end{cases}$. Remarquons que cette fonction est développable en série entière, $\operatorname{sinc} t = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k+1)!}$.

En posant $c = \frac{a+b}{2}$ le centre de l'intervalle $[a,b]$ et $\ell = b - a$ sa longueur, $\ell = 2r$ avec r le rayon de l'intervalle, alors

$$\hat{f}(\xi) = \ell e^{2i\pi c\xi}\operatorname{sinc}\pi\ell\xi = 2re^{2i\pi c\xi}\operatorname{sinc}2\pi r\xi.$$

Remarquons ensuite que si f est un produit (tensoriel) de fonctions $f(x_1,\ldots,x_d) = \displaystyle\prod_{j=1}^d f_j(x_j)$ avec chaque $f_j \in L^1(\mathbb{R})$, alors il en va de même pour sa transformée de Fourier

Date: October 12, 2020.

$\hat{f}$: $\hat{f}(\xi_1,\ldots,\xi_d)=\prod_{j=1}^d \hat{f}_j(\xi_j)$. Ceci résulte directement du théorème de Fubini et du simple calcul $e^{-2i\pi\langle x,\xi\rangle}=e^{-2i\pi\sum_{j=1}^d x_j\xi_j}=\prod_{j=1}^d e^{-2i\pi x_j\xi_j}$.

Maintenant, si $Q=\prod_{j=1}^d [a_j,b_j]$ est un cube, notons $\ell_j=b_j-a_j$ pour les longueurs de ses côtés, $|Q|=\prod_{j=1}^d \ell_j$ son volume, $c=\left(\frac{a_1+b_1}{2},\ldots,\frac{a_d+b_d}{2}\right)$ son centre de gravité. Alors, pour $f(x)=\mathbf{1}_Q(x)=\prod_{j=1}^d \mathbf{1}_{[a_j,b_j]}(x_j)$, on a

$$\hat{f}(\xi)=|Q|\,e^{2i\pi\langle c,\xi\rangle}\prod_{j=1}^d \operatorname{sinc}\pi\ell_j\xi_j.$$

Remarquons que $\hat{f}\in\mathcal{C}_0(\mathbb{R}^d)$ ce que nous utiliserons par la suite.

Nous avons déjà vu que la transformée de Fourier était bien définie. On a un peu mieux. Posons $F(x,\xi)=f(x)e^{-2i\pi\langle x,\xi\rangle}$. Alors, à x fixé, $\xi\to F(x,\xi)$ est continue. De plus, $|F(x,\xi)|=|f(x)|\in L^1(\mathbb{R}^d)$, d'après le théorème de continuité de Lebesgue, $\hat{f}(\xi)=\int_{\mathbb{R}^d}F(x,\xi)\,\mathrm{d}x$ est continue. De plus

$$|\hat{f}(\xi)|\leqslant\int_{\mathbb{R}^d}|F(x,\xi)|\,\mathrm{d}x=\int_{\mathbb{R}^d}|f(x)|\,\mathrm{d}x=\|f\|_{L^1(\mathbb{R}^d)}.$$

Comme $\mathcal{F}:f\to\hat{f}$ est évidemment linéaire, l'application $\mathcal{F}$ est continue $L^1(\mathbb{R}^d)\to\mathcal{C}_b(\mathbb{R}^d)$, l'espace des fonctions continues bornées sur $\mathbb{R}^d$. On a un peu plus:

Théorème 1.3 (Lemme de Riemann-Lebesgue)**.** *La transformée de Fourier $\mathcal{F}$ est une application linéaire bornée $L^1(\mathbb{R}^d)\to\mathcal{C}_0(\mathbb{R}^d)$ avec $\|\mathcal{F}f\|_\infty\leqslant\|f\|_1$.*

Démonstration. On a déjà vu que $\mathcal{F}$ est linéaire bornée $L^1(\mathbb{R}^d)\to\mathcal{C}_b(\mathbb{R}^d)$ avec $\|\mathcal{F}f\|_\infty\leqslant\|f\|_1$. Il ne nous reste donc plus qu'à montrer que $\mathcal{F}f\in\mathcal{C}_0(\mathbb{R}^d)$ quand $f\in L^1(\mathbb{R}^d)$.

Nous avons vu que c'était le cas si $f=\mathbf{1}_Q$, Q un cube, cela est donc encore vrai quand f est une combinaison linéaire (finie) de telles fonctions *i.e.* une fonction étagée. Mais ces fonctions forment un espace vectoriel dense. Ainsi, si $f\in L^1(\mathbb{R}^d)$, il existe une suite (f_k) de fonctions étagées, telle que $\|f_k-f\|_{L^1}\to 0$ quand $k\to\infty$. Mais alors

$$\|\mathcal{F}f-\mathcal{F}f_k\|_\infty=\|\mathcal{F}(f-f_k)\|_\infty\leqslant\|f-f_k\|_1\to 0.$$

En d'autres termes, $\mathcal{F}f_k\to\mathcal{F}f$ dans $\mathcal{C}_b(\mathbb{R}^d)$. Comme $\mathcal{F}f_k\in\mathcal{C}_0(\mathbb{R}^d)$ qui est fermé dans $\mathcal{C}_b(\mathbb{R}^d)$ (ce que nous avons déjà démontré dans le chapître sur la convolution), on obtient que $\mathcal{F}f\in\mathcal{C}_0(\mathbb{R}^d)$. □

Seconde démonstration. Il y a une seconde démonstration du fait que $\hat{f}(\xi) \to 0$ quand $\xi \to \pm\infty$. On remarque d'abord que si $\xi \neq 0$ $-1 = e^{-i\pi} = e^{-2i\pi\langle\xi,\xi\rangle/2\|\xi\|^2}$ donc

$$
\begin{aligned}
2\hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} f(t)e^{-2i\pi t\xi}\,\mathrm{d}t - \int_{\mathbb{R}} f(t)e^{-2i\pi\langle\xi,\xi\rangle/2\|\xi\|^2}e^{-2i\pi t\xi}\,\mathrm{d}t \\
= \int_{\mathbb{R}} f(t)e^{-2i\pi t\xi}\,\mathrm{d}t - \int_{\mathbb{R}} f(t)e^{-2i\pi\left\langle t+\xi/2\|\xi\|^2,\xi\right\rangle}\,\mathrm{d}t \\
= \int_{\mathbb{R}} \left[f(t) - f\left(t - \frac{\xi}{2\|\xi\|^2}\right)\right] e^{-2i\pi t\xi}\,\mathrm{d}t.
\end{aligned}
$$

Ainsi, $\hat{f}(\xi) = \dfrac{1}{2}\mathcal{F}[f - \tau_{\frac{\xi}{2\|\xi\|^2}} f](\xi)$. Par suite $|\hat{f}(\xi)| \leqslant \left\|f - \tau_{\frac{\xi}{2\|\xi\|^2}} f\right\|_1$. Mais alors, en faisant $\|\xi\| \to \infty$ et en utilisant la continuité de l'application $\mathbb{R} \to L^1(\mathbb{R})$ donnée par $a \to \tau_a f$, il vient $|\hat{f}(\xi)| \to 0$.

Rappelons que la continuité des translations utilisait un argument de densité. □

Listons quelques unes des propriétés essentielles de la transformée de Fourier. Pour cela, introduisons les notations suivantes. Pour $a, \omega \in \mathbb{R}^d$, $\lambda > 0$, $T \in GL_n(\mathbb{R}^d)$ (une matrice $d \times d$ inversible) et f une fonction sur $\mathbb{R}^d$, on défini les nouvelles fonctions sur $\mathbb{R}^d$

$$
\tau_a f(x) = f(x-a),\ M_\omega f(x) = e^{-2i\pi\langle\omega,x\rangle} f(x),\ \delta_\lambda f(x) = f(\lambda x),\ \Delta_T f(x) = f(T^{-1}x).
$$

Notons que $\tau_a, M_\omega, \delta_\lambda, \Delta_T$ sont des applications linéaires continues sur $L^p \to L^p$ pour tout p.

Proposition 1.4. *Supposons que $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ alors*
– $\mathcal{F}[\tau_a f] = M_a\mathcal{F}[f]$, $\mathcal{F}[M_\omega f] = \tau_{-\omega}\mathcal{F}[f]$,
– $\mathcal{F}[\delta_\lambda f] = \lambda^{-d}\mathcal{F}[\delta_{1/\lambda} f]$ *et plus généralement* $\mathcal{F}[\Delta_T f] = |\det T|\Delta_{[T^{-1}]^t}\mathcal{F}[f]$.
– *Si $\xi_j f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ alors $\hat{f}$ admet une dérivée partielle continue par rapport à ξ_j avec* $\dfrac{\partial \hat{f}}{\partial \xi_j}(\xi) = -2i\pi\mathcal{F}[x_j f](\xi)$.
– *Si f est $\mathcal{C}^1$ avec* $\dfrac{\partial f}{\partial x_j} \in L^1(\mathbb{R}^d)$, *alors* $\mathcal{F}\left[\dfrac{\partial f}{\partial x_j}\right](\xi) = 2i\pi\xi_j\mathcal{F}[f](\xi)$.
– *Si $f, g \in L^1(\mathbb{R}^d)$ alors* $\mathcal{F}[f * g] = \mathcal{F}[f]\mathcal{F}[g]$.

Démonstration. Les 4 premières résultent d'un simple changement variable:
– le changement de variable $y = x - a$ donne

$$
\begin{aligned}
\mathcal{F}[\tau_a f](\xi) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x-a)e^{-2i\pi\langle x,\xi\rangle}\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^d} f(y)e^{-2i\pi\langle y+a,\xi\rangle}\,\mathrm{d}y \\
= e^{-2i\pi\langle a,\xi\rangle}\int_{\mathbb{R}^d} f(y)e^{-2i\pi\langle y,\xi\rangle}\,\mathrm{d}y = e^{-2i\pi\langle a,\xi\rangle}\hat{f}(\xi).
\end{aligned}
$$

– La suivante est encore plus simple

$$
\mathcal{F}[M_\omega f](\xi) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x)e^{-2i\pi\langle\omega,\xi\rangle}e^{-2i\pi\langle x,\xi\rangle}\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^d} f(x)e^{-2i\pi\langle x+\omega,\xi\rangle}\,\mathrm{d}x = \hat{f}(\xi+\omega).
$$

– le changement de variable $y=\lambda x$ donne

$$\begin{aligned}\mathcal{F}[\delta_\lambda f](\xi)=\int_{\mathbb{R}^d}f(\lambda x)e^{-2i\pi\langle x,\xi\rangle}\,\mathrm{d}x&=\lambda^{-d}\int_{\mathbb{R}^d}f(y)e^{-2i\pi\langle y/\lambda,\xi\rangle}\,\mathrm{d}y\\&=\lambda^{-d}\int_{\mathbb{R}^d}f(y)e^{-2i\pi\langle y,\xi/\lambda\rangle}\,\mathrm{d}y=\lambda^{-d}\hat f(\xi/\lambda).\end{aligned}$$

C'est un cas particulier du suivant:

– le changement de variable $y=T^{-1}x$, $x=Ty$ donne

$$\begin{aligned}\mathcal{F}[\Delta_T f](\xi)=\int_{\mathbb{R}^d}f(T^{-1}x)e^{-2i\pi\langle x,\xi\rangle}\,\mathrm{d}x&=|\det T|\int_{\mathbb{R}^d}f(y)e^{-2i\pi\langle Ty,\xi\rangle}\,\mathrm{d}y\\&=|\det T|\int_{\mathbb{R}^d}f(y)e^{-2i\pi\left\langle y,T^t\xi\right\rangle}\,\mathrm{d}y=|\det T|\hat f(T^t\xi).\end{aligned}$$

–Les deux suivants sont à peine plus subtiles. Si $x_jf\in L^1(\mathbb{R}^d)$ et en considérant à nouveau $F(x,\xi)=f(x)e^{-2i\pi\langle x,\xi\rangle}$ alors, à x fixé, $\xi\to F(x,\xi)$ est de classe $\mathcal{C}^1$, $|F(x,\xi)|=|f(x)|\in L^1(\mathbb{R}^d)$ et

$$\left|\frac{\partial F}{\partial\xi_j}(x,\xi)\right|=\left|-2i\pi x_jf(x)e^{-2i\pi\langle x,\xi\rangle}\right|=2\pi|x_jf|\in L^1(\mathbb{R}^d).$$

Le théorème de dérivation de Lebesgue implique donc que $\hat f(\xi)=\displaystyle\int_{\mathbb{R}^d}F(x,\xi)\,\mathrm{d}x$ est dérivable par rapport à ξ_j avec

$$\frac{\partial\hat f}{\partial\xi_j}(\xi)=\int_{\mathbb{R}^d}\frac{\partial F}{\partial\xi_j}(x,\xi)=\int_{\mathbb{R}^d}-2i\pi x_jf(x)e^{-2i\pi\langle x,\xi\rangle}\,\mathrm{d}x=\mathcal{F}[-2i\pi x_jf](\xi).$$

– Enfin, supposons que $f\in\mathcal{C}^1$, $f,\dfrac{\partial f}{\partial\xi_j}\in L^1$. Pour simplifier les notations, prenons $j=1$. Notons qu'avec Fubini,

$$\int_{\mathbb{R}^d}|f(x)|\,\mathrm{d}x=\int_{\mathbb{R}^{d-1}}\left(\int_{\mathbb{R}}|f(x_1,x_2,\ldots,x_d)|\,\mathrm{d}x_1\right)\,\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_d<+\infty$$

de sorte que $\displaystyle\int_{\mathbb{R}}|f(x_1,x_2,\ldots,x_d)|\,\mathrm{d}x_1<+\infty$ pour presque tout $(x_2,\ldots,x_d)$. Cela reste bien sûr vrai en remplaçant f par $\frac{\partial f}{\partial\xi_1}$. Ainsi les 2 propriétés sont simultanément vraies presque partout: presque tout $(x_2,\ldots,x_d)$ est tel que

$$\int_{\mathbb{R}}|f(x_1,x_2,\ldots,x_d)|\,\mathrm{d}x_1<+\infty\quad\text{et}\quad\int_{\mathbb{R}}\left|\frac{\partial f}{\partial\xi_1}(x_1,x_2,\ldots,x_d)\right|\mathrm{d}x_1<+\infty.$$

Le théorème fondamental de l'intégration montre que

$$\begin{aligned}f(x_1,x_2,\ldots,x_d)=f(0,x_2,\ldots,x_d)+\int_0^{x_1}\frac{\partial f}{\partial\xi_1}(t,x_2,\ldots,x_d)\mathrm{d}t\\\to f(0,x_2,\ldots,x_d)+\int_0^{\pm\infty}\frac{\partial f}{\partial\xi_1}(t,x_2,\ldots,x_d)\mathrm{d}t\end{aligned}$$

quand $x_1 \to \pm\infty$. Ainsi $f(x_1, x_2, \ldots, x_d)$ a une limite en $\pm\infty$. Mais comme

$$\int_{\mathbb{R}} |f(x_1, x_2, \ldots, x_d)| \, \mathrm{d}x_1 < +\infty$$

cette limite est zero.

Ensuite écrivons $x, \xi \in \mathbb{R}^d$ sous la forme $x = (x_1, \bar{x})$, $\xi = (\xi_1, \bar{\xi})$ avec $\bar{x}, \bar{\xi} \in \mathbb{R}^{d-1}$. En intégrant par parties,

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} \frac{\partial f}{\partial \xi_1}(x_1, \bar{x}) e^{-2i\pi\langle x,\xi\rangle} \mathrm{d}x_1 &= \int_{\mathbb{R}} \frac{\partial f}{\partial \xi_1}(x_1, \bar{x}) e^{-2i\pi x_1 \xi_1} \mathrm{d}x_1 e^{-2i\pi\left\langle \bar{x},\bar{\xi}\right\rangle} \\
&= e^{-2i\pi\left\langle \bar{x},\bar{\xi}\right\rangle} \left[f(x_1, \bar{x}) e^{-2i\pi x_1 \xi_1}\right]_{-\infty}^{+\infty} \\
&\quad +2i\pi\xi_1 \int_{\mathbb{R}} f(x_1, \bar{x}) e^{-2i\pi x_1 \xi_1} \mathrm{d}x_1 e^{-2i\pi\left\langle \bar{x},\bar{\xi}\right\rangle} \\
&= 2i\pi\xi_1 \int_{\mathbb{R}} f(x_1, \bar{x}) e^{-2i\pi\langle x,\xi\rangle} \, \mathrm{d}x_1.
\end{aligned}$$

Il ne reste plus qu'à intégrer par rapport aux $d-1$ variables restantes et d'utiliser Fubini.

La dernière propriété est une conséquence directe de Fubini et du changement de variable $u = x - y$

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}[f * g](\xi) &= \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} f(y) g(x-y) \, \mathrm{d}y \, e^{-2i\pi\langle x,\xi\rangle} \, \mathrm{d}x \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} f(y) \int_{\mathbb{R}^d} g(x-y) e^{-2i\pi\langle x,\xi\rangle} \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} f(y) \int_{\mathbb{R}^d} g(u) e^{-2i\pi\langle u+y,\xi\rangle} \, \mathrm{d}u \, \mathrm{d}y \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} f(y) \int_{\mathbb{R}^d} g(u) e^{-2i\pi\langle u,\xi\rangle} \, \mathrm{d}u \, e^{-2i\pi\langle y,\xi\rangle} \, \mathrm{d}y \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} f(y) \hat{g}(\xi) \, e^{-2i\pi\langle y,\xi\rangle} \, \mathrm{d}y = \hat{h}(\xi) \hat{g}(\xi)
\end{aligned}$$

comme annoncé. Comme

$$\int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} |f(y) g(x-y) \, e^{-2i\pi\langle x,\xi\rangle}| \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y = \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} |f(y) g(x-y)| \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y = \|f\|_1 \|g\|_1 < +\infty,$$

l'utilisation de Fubini est justifiée. □

Nous sommes maintenant en mesure de donner un second exemple fondamental, la gaussienne:

Exemple 1.5. Soit f la gaussienne defini pour $x \in \mathbb{R}$ par $f(x) = e^{-\pi x^2}$, alors $\hat{f}(\xi) = e^{-\pi \xi^2}$.

En effet, remarquons d'abord que $\hat{f}(0) = \displaystyle\int_{\mathbb{R}} e^{-\pi x^2} \, \mathrm{d}x$. Il existe plusieurs façons de calculer cette intégrale. Par exemple en utilisant Fubini et en passant en coordonées polaires

:

$$\begin{aligned}\hat f(0)^2 &= \int_{\mathbb{R}} e^{-\pi x^2}\,\mathrm{d}x\int_{\mathbb{R}} e^{-\pi y^2}\,\mathrm{d}y=\int_{\mathbb{R}^2} e^{-\pi(x^2+y^2)}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\\ &= \int_0^{+\infty}\int_0^{2\pi} e^{-\pi r^2}\,\mathrm{d}\theta r\,\mathrm{d}r\\ &= \int_0^{+\infty} 2\pi r e^{-\pi r^2}\,\mathrm{d}r=[-e^{-\pi r^2}]_0^{+\infty}=1.\end{aligned}$$

Comme $\hat f(0)$ est l'intégrale d'une fonction positive , $\hat f(0)\geqslant 0$ donc $\hat f(0)=1$.

Ensuite, on remarque que f vérifie l'équation differentielle $f'=-2\pi x f$ donc $\mathcal{F}[f']=-2\pi\mathcal{F}[xf]$. Comme f est $\mathcal{C}^1$ avec $f,xf,f'\in L^1$ on peut utiliser les proprités précédentes: $\hat f'=-2i\pi\mathcal{F}[xf]$ alors que $\mathcal{F}[f']=2i\pi\xi\hat f$. Ainsi $\hat f$ vérifie l'équation differentielle $(\hat f)'=-2\pi\xi\hat f$ qui est la même équation que celle vérifié par la gaussienne. Ainsi (avec Cauchy-Lipschitz) $\hat f=cf$. En comparant les valeurs en 0, on obtient $\hat f=f$.

En dimension supérieure, comme $\gamma(x)=e^{-\pi|x|^2}=\prod_{j=1}^d e^{-\pi x_j^2}$ on a $\hat\gamma(\xi)=\prod_{j=1}^d e^{-\pi\xi_j^2}=e^{-\pi|\xi|^2}$.

Enfin, si A est une matrice symétrique définite positive et $f(x)=e^{-\pi\langle Ax,x\rangle}$. D'abord, comme A est réelle symétrique, est est diagonalisable dans une base orthonormée, on peut donc écrire $A=P\Delta P^t$ avec Δ diagonal et P orthogonale. Écrivons $\Delta=\mathrm{diag}\,(\lambda_1,\ldots,\lambda_d)$. Comme A est définie positive, les λ_j sont >0 et on les écrit $\lambda_j=\mu_j^2$, $\mu_j>0$. On pose alors $B=P\mathrm{diag}\,(\mu_1,\ldots,\mu_d)P^t$ et on remarque que $B^t=B$, B est inversible avec $B^{-1}=P\mathrm{diag}\,(1/\mu_1,\ldots,1/\mu_d)P^t$ et $A=B^2=B^tB$. Par suite $\langle Ax,x\rangle=\langle B^tBx,x\rangle=|Bx|^2$ donc $f(x)=\gamma(Bx)$. Ainsi $f\in L^1(\mathbb{R}^d)$ et $\hat f(x)=|\det B^{-1}|\gamma(B^{-1}x)$. Enfin $(B^{-1})^tB^{-1}=(B^{-1})^2=A^{-1}$ donc $|\det B^{-1}|=\det(A)^{-1/2}$ et

$$|B^{-1}x|^2=\big\langle B^{-1}x,B^{-1}x\big\rangle=\big\langle (B^{-1})^tB^{-1}x,x\big\rangle=\big\langle A^{-1}x,x\big\rangle$$

En résumé, $\hat f(\xi)=\det(A)^{-1/2}e^{-\pi\langle A^{-1}x,x\rangle}$.

15 min

2. Formule d'inversion et transformée de Fourier sur $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$

Nous allons maintenant montrer que la transformée de Fourier est (presque) inversible et qu'elle est (presque) sa propre inverse.

Avant cela, commençons par une observation simple. Supposons que $f,g\in L^1(\mathbb{R}^d)$, alors $\hat f,\hat g\in\mathcal{C}_0(\mathbb{R}^d)$ donc $f\hat g$ et $g\hat f$ sont toutes deux intégrables. Comme

$$\int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d}|f(x)g(y)|\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x=\|f\|_{L^1}\|g\|_{L^1}<+\infty,$$

le théorème de Fubini montre que

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^d} f(x)\hat g(x)\,\mathrm{d}x &= \int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d} f(x)g(y)e^{-2i\pi\langle x,y\rangle}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x\\ &= \int_{\mathbb{R}^d} g(y)\int_{\mathbb{R}^d} f(x)e^{-2i\pi\langle y,x\rangle}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\int_{\mathbb{R}^d} g(y)\hat f(y)\,\mathrm{d}y.\end{aligned}\tag{2.1}$$

Remplaçons maintenant g par $M_\omega g$ de sorte que $\hat g$ est remplacée par $\tau_\omega\hat g$. On obtient

$$\int_{\mathbb{R}^d} f(x)\hat g(x-\omega)\,\mathrm{d}x=\int_{\mathbb{R}^d} g(y)\hat f(y)e^{2i\pi\langle\omega,y\rangle}\,\mathrm{d}y.\tag{2.2}$$

Le membre de gauche est une convolution et c'est en effet $f * \hat{g}$ lorsque $\hat{g}$ est paire. Prenons par exemple $g(y) = e^{-\pi|\lambda y|^2}$ de sorte que $\hat{g}(x) = \lambda^{-d} e^{-\pi|x/\lambda|^2}$. Notons $\gamma_\lambda(x) = \lambda^{-d} e^{-\pi|x/\lambda|^2}$. Alors (2.2) se lit

$$f * \gamma_\lambda(\omega) = \int_{\mathbb{R}^d} e^{-\pi|\lambda y|^2} \hat{f}(y) e^{2i\pi\langle\omega,y\rangle} \,\mathrm{d}y. \tag{2.3}$$

Mais, comme $\gamma \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, le théorème d'approximation de l'unité du chapitre précédent nous dit que $f * \gamma_\lambda \to f$ dans $L^1(\mathbb{R}^d)$. En particulier, si $f_1, f_2 \in L^1(\mathbb{R}^d)$ sont tels que $\hat{f}_1 = \hat{f}_2$ alors $f_1 * \gamma_\lambda(\omega) = f_2 * \gamma_\lambda(\omega)$. En faisant $\lambda \to 0$ on en déduit que $f_1 = f_2$. Ainsi, la transformée de Fourier est *injective* sur L^1.

Regardons maintenant le membre de gauche de (2.2). Remarquons que

$$e^{-\pi|\lambda y|^2} \hat{f}(y) e^{2i\pi\langle\omega,y\rangle} \to \hat{f}(y) e^{2i\pi\langle\omega,y\rangle} \qquad \text{quand} \qquad \lambda \to 0.$$

De plus, $|e^{-\pi|\lambda y|^2} \hat{f}(y) e^{2i\pi\langle\omega,y\rangle}| = |e^{-\pi|\lambda y|^2} \hat{f}(y)| \leqslant |\hat{f}(y)|$, si $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R}^d)$, on peut donc utiliser le théorème de convergence dominée et on obtient alors le théorème suivant:

Théorème 2.1 (Formule d'inversion de Fourier)**.** *La transformée de Fourier est injective $L^1(\mathbb{R}^d) \to \mathcal{C}_0(\mathbb{R}^d)$. De plus, si $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ est tel que $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R}^d)$, alors $f \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R}^d)$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}^d$,*

$$f(x) = \int_{\mathbb{R}^d} \hat{f}(\xi) e^{2i\pi\langle\xi,x\rangle} \,\mathrm{d}\xi.$$

Démonstration. Nous n'avons pas complètement démontré la formule d'inversion puisque nous n'avons pour l'instant montré sa validité au sens L^1. Pour l'égalité ponctuelle, il faut observer que le membre de droite est $\mathcal{F}[\hat{f}](-x)$. Comme $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R}^d)$, le lemme de Riemann-Lebesgue implique que le membre de droite est dans in $\mathcal{C}_0$. Maintenant $f * \gamma_\lambda \to f$ dans L^1, il existe donc une suite λ_j pour laquelle $f * \gamma_{\lambda_j} \to f$ presque partout. Ainsi $f = \mathcal{F}[\hat{f}](-x)$ presque partout i.e. f est dans la classe d'une fonction $\mathcal{C}_0$. Notre convention est que f est précisément cette fonction continue. ☐

La formule d'inversion de Fourier montre que la transformée de Fourier est presque sa propre inverse, cela explique en partie les propriétés très symétriques de la Proposition 1.4.

Remarque 2.2. Si $f = \mathbf{1}_{[-1,1]}$ alors $\hat{f} = \operatorname{sinc} 2\pi t \notin L^1(\mathbb{R})$. Par suite $\int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\xi) e^{2i\pi\xi x} \,\mathrm{d}\xi$ ne peut être proprement définie. Nous verrons plus loin que

$$\lim_{R,S\to+\infty} \int_{-R}^{S} \hat{f}(\xi) e^{2i\pi\xi x} \,\mathrm{d}\xi \to \mathbf{1}_{[-1,1]}(x)$$

dans L^2. En fait,

$$\lim_{R\to+\infty} \int_{-R}^{R} \hat{f}(\xi) e^{2i\pi\xi x} \,\mathrm{d}\xi \to \mathbf{1}_{[-1,1]}(x)$$

est valable pour tout x sauf aux sauts $x = \pm 1$. Il faut remarquer que dans cette formule on a intégré sur un interval symétrique $[-R, R]$.

Remarque 2.3. Il est important de savoir que la transformée de Fourier n'est *pas* une bijection $L^1(\mathbb{R}^d) \to \mathcal{C}_0(\mathbb{R}^d)$. Elle n'est pas surective puisqu'il existe des fonctions de $\mathcal{C}_0(\mathbb{R}^d)$ qui ne sont pas les transformées de Fourier de fonction de L^1. Nous construirons plus loin une fonction de $\mathcal{C}_0(\mathbb{R})$ qui n'est la transformée de Fourier d'aucune fonction de $L^1(\mathbb{R})$.

Supposons maintenant que $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$. Pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^d$, $x^\alpha f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \subset L^1(\mathbb{R}^d)$. La Proposition 1.4 montre que $\hat{f} \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^d)$ et $\partial^\alpha \hat{f} = (-2i\pi)^{|\alpha|}\mathcal{F}[x^\alpha f]$. De plus comme $x^\alpha f \in \mathcal{S}$, pour tout $\beta \in \mathbb{N}^d$, $\partial^\beta(x^\alpha f) \in \mathcal{S} \subset L^1(\mathbb{R}^d)$. En utilisant encore la Proposition 1.4 on obtient que $x^\beta \partial^\alpha \hat{f} = (-2i\pi)^{|\alpha|-|\beta|}\mathcal{F}[\partial^\beta(x^\alpha f)]$. Mais alors, le lemme de Riemann-Lebesgue implique que $\mathcal{F}[\partial^\beta(x^\alpha f)]$ est dans $\mathcal{C}_0$. En particulier, c'est une fonction bornée. Nous venons donc de montrer que $\hat{f} \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^d)$ et que, pour tous $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^d$, $x^\beta \partial^\alpha \hat{f}$ est bornée, c'est-à-dire $\hat{f} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$.

Finalement, comme $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \subset L^1(\mathbb{R}^d)$, la formule d'inversion de Fourier s'applique à $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ et donne $f(x) = \mathcal{F}[\hat{f}](-x)$. En écrivant $Z\hat{f}(y) = \hat{f}(-y)$ et en remarquant que $Z\hat{f} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ et que $\mathcal{F}[\hat{f}](-x) = \mathcal{F}[Zf](x)$, on voit que tout $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ est la transformée de Fourier d'une fonction de la classe de Schwartz. Nous venons donc de montrer le résultat suivant:

Théorème 2.4. *La transformée de Fourier est une bijection $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \to \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$. Son inverse est donnée par $\mathcal{F}^{-1}[f](\xi) = \mathcal{F}[f](-\xi)$.*

20 min

3. La théorie L^2

3.1. **Parseval-Plancherel.** Notre but est maintenant de définir la transformée de Fourier sur d'autres espaces L^p. Rappelons que, si $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \subset L^1(\mathbb{R}^d)$ alors

$$\int_{\mathbb{R}^d} f(x)\hat{g}(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^d} g(y)\hat{f}(y)\,\mathrm{d}y.$$

Soit alors $h \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, de sorte que $\bar{h} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$et la formule d'inversion de Fourier se lit

$$\bar{h}(x) = \overline{\int_{\mathbb{R}^d} \hat{h}(y)e^{2i\pi\langle y,x\rangle}\,\mathrm{d}y} = \int_{\mathbb{R}^d} \overline{\hat{h}(y)}e^{-2i\pi\langle y,x\rangle}\,\mathrm{d}y = \mathcal{F}[\overline{\hat{h}(y)}].$$

Remplaçons donc g par $\overline{\hat{h}(y)} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ dans la formule ci-dessus. On obtient

$$\int_{\mathbb{R}^d} f(x)\overline{h(x)}\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^d} \hat{f}(y)\overline{\hat{h}(y)}\,\mathrm{d}y, \qquad f, h \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d).$$

En particulier, en prenant $h = f$, on obtient $\|\mathcal{F}[f]\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} = \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}$ pour tout $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$. Comme $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ est dense dans $L^2(\mathbb{R}^d)$, on peut appliquer le principe d'extension de Banach. Il s'en suit que $\mathcal{F}$ se prolonge d'une application linéaire $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \to \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ en une application linéaire continue $L^2(\mathbb{R}^d) \to L^2(\mathbb{R}^d)$. De plus l'application $\mathcal{F}^{-1}(f)(x) = \mathcal{F}(f)(-x)$ se prolonge aussi d'une application linéaire $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \to \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ en une application linéaire continue $L^2(\mathbb{R}^d) \to L^2(\mathbb{R}^d)$. Comme $\mathcal{F}^{-1}\big[\mathcal{F}[f]\big] = \mathcal{F}\big[\mathcal{F}^{-1}[f]\big] = f$ pour tout $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, par densité de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ dans $L^2(\mathbb{R}^d)$, cette identité est valable pour tout $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$. En particulier, $\mathcal{F}$ est une bijection $L^2(\mathbb{R}^d) \to L^2(\mathbb{R}^d)$ et son inverse est l'application $\mathcal{F}^{-1}$.

Finallement, comme $\tau_a, M_\omega, \delta_\lambda, \Delta_T$ sont toutes continuues sur $L^2(\mathbb{R}^d)$, les identités de la Proposition 1.4 sont encore valable dans $L^2(\mathbb{R}^d)$.

En résumé

Théorème 3.1. *La transformée de Fourier se prolonge en une application linéaire continue $L^2(\mathbb{R}^d) \to L^2(\mathbb{R}^d)$ et le prolongement est une bijection. Cette application est une isométrie et vérifie*

– *l'identité de Plancherel: pour tout* $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$

$$\int_{\mathbb{R}^d} |f(x)|^2\, dx = \int_{\mathbb{R}^d} |\hat{f}(\xi)|^2\, d\xi.$$

– *l'identité de Parseval: pour tous* $f, g \in L^2(\mathbb{R}^d)$

$$\int_{\mathbb{R}^d} f(x)\overline{g(x)}\, dx = \int_{\mathbb{R}^d} \hat{f}(\xi)\overline{g(\xi)}\, d\xi.$$

De plus, on a $\mathcal{F}[\tau_a f] = M_a\mathcal{F}[f]$, $\mathcal{F}[M_\omega f] = \tau_{-\omega}\mathcal{F}[f]$, $\mathcal{F}[\delta_\lambda f] = \lambda^{-d}\mathcal{F}[\delta_{1/\lambda} f]$ *et* $\mathcal{F}[\Delta_T f] = |\det T|\Delta_{[T^{-1}]^t}\mathcal{F}[f]$ *pour tout* $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$

Notons que l'identié de convolution $\widehat{f * g} = \hat{f}\hat{g}$ n'a (pour l'instant) pas de sens lorsque $f, g \in L^2(\mathbb{R}^d)$ puisqu'alors $f * g \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R}^d)$ et que nous ne pouvons définir $\widehat{f * g}$ dans ce cas.

Avant de continuer, la remarque suivante doit vous permettre d'éviter de dire des bêtises et de prendre conscience d'une difficulté essentielle concernant la transformée de Fourier dans $L^2(\mathbb{R}^d)$.

Remarque 3.2. Lorsque $f \in L^2(\mathbb{R}^d) \cap L^1(\mathbb{R}^d)$, le principe de prolongement de Banach nous dit que la nouvelle définition coïncide avec l'ancienne: pour preque tout $\xi \in \mathbb{R}^d$,

$$\mathcal{F}[f](\xi) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x)e^{-2i\pi\langle x,\xi\rangle}\,\mathrm{d}\xi.$$

De plus, le membre de gauche est continu donc $\mathcal{F}[f]$ est continue (plus précisément, a un représentant continu).

Par contre, il est important de comprendre que, si $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$ mais $f \notin L^1(\mathbb{R}^d)$, sa transformée de Fourier **n'est pas définie par**

$$\mathcal{F}[f](\xi) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x)e^{-2i\pi\langle x,\xi\rangle}\,\mathrm{d}\xi$$

puisque cette intégrale n'a pas de sens. Toutefois, si on prend $R > 0$ et qu'on pose $f_R = f\mathbf{1}_{B(0,R)}$ alors on voit facilement que $f_R \in L^2(\mathbb{R}^d) \cap L^1(\mathbb{R}^d)$ et que $f_R \to f$ dans $L^2(\mathbb{R}^d)$. Par continuité de la transformée de Fourier, on a donc $\mathcal{F}[f_R] \to \mathcal{F}[f]$ dans $L^2(\mathbb{R}^d)$. Mais $\mathcal{F}[f_R]$ est la transformée de Fourier d'une fonction de L^1 et est donc défini par une intégrale. Explicitement, cet argument montre que

$$\mathcal{F}[f](\xi) = \lim_{R\to+\infty} \int_{|x|\leqslant R} f(x)e^{-2i\pi\langle x,\xi\rangle}\,\mathrm{d}\xi$$

et cette limite est au sens de $L^2(\mathbb{R}^d)$.

D'après le cours sur les espaces L^p, il existe donc une suite (R_j) avec $R_j \to +\infty$ telle que

$$\mathcal{F}[f](\xi) = \lim_{j\to+\infty} \int_{|x|\leqslant R_j} f(x)e^{-2i\pi\langle x,\xi\rangle}\,\mathrm{d}\xi$$

presque partout. On peut prendre $R_j = j$ en dans $L^2(\mathbb{R})$ (en dimension 1, Carleson, d=1, prix Abel). Le cas de la dimension supérieure est extrêmement complexe (conjecture de Bochner-Riesz qui reste ouverte, malgré les contributions de nombreux mathématiciens dont 3 médaillés Fields: Feffermann, Bourgain, Tao).

Passons maintenant à un exemple fondamental en théorie du filtrage.

Exemple 3.3. Pour $a > 0$ on définit les fonctions $e_a^\pm$ sur $\mathbb{R}$ par $e_a^+(t) = \mathbf{1}_{[0,+\infty)}e^{-at}$ et $e_a^-(t) = \mathbf{1}_{(-\infty,0]}e^{at}$. Notons que $e_a^\pm \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ leurs transformées de Fourier sont donc données par

$$\hat{e}_a^+(\xi) = \int_0^{+\infty} e^{-(a+2i\pi\xi)t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{a+2i\pi\xi}$$

et

$$\hat{e}_a^-(\xi) = \int_{-\infty}^0 e^{(a-2i\pi\xi)t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{a-2i\pi\xi}.$$

Définissons alors $c_a^\pm$ sur $\mathbb{R}$ par $c_a^\pm(x) = \dfrac{1}{a \pm 2i\pi x}$. Remarquons que $c_a^\pm \in L^2$ mais ces fonctions *ne sont pas* dans L^1. Ces fonctions ont donc une transformée de Fourier au sens L^2 mais qui ne sont pas définies au sens L^1 *i.e.* par une intégrale. Toutefois $c_a^\pm = \mathcal{F}[e_a^\pm]$ (au sens L^1 donc encore au sens L^2). Le théorème d'inversion de Fourier nous dit donc que $\mathcal{F}[c_a^\pm](\xi) = \mathcal{F}\big[\mathcal{F}[e_a^\pm]\big](\xi) = \mathcal{F}^{-1}\big[\mathcal{F}[e_a^\pm]\big](-\xi) = e_a^\pm(-\xi) = e_a^\mp(\xi)$. Il s'agît d'une identité L^2, elle n'est donc valable que presque partout.

On peut remarquer que $e_a^\pm$ n'est pas continue, ainsi, d'après Riemann-Lebesgue, ce n'est pas la transformée de Fourier d'une fonction de L^1.

3.2. **Fourier n'est pas surjectif $L^1 \to \mathcal{C}_0$.** Nous pouvons maintenant utiliser ce qui précède pour construire une fonction de $\mathcal{C}_0$ qui n'est pas la transformée de Fourier d'une fonction de L^1.

Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(t) = \frac{\mathrm{sgn}(t)}{1+|t|}$. Remarquons que $f \in L^2(\mathbb{R})$ mais $f \notin L^1(\mathbb{R})$. mais seulement au sens d'une limite L^2. Pour cela, nous allons utiliser l'identité suivante

$$\frac{1}{1+|t|} = \int_0^{+\infty} e^{-(1+|t|)x}\,\mathrm{d}x.$$

Du théorème de Fubini on déduit alors que

$$\begin{aligned}
\int_{-R}^R \frac{\mathrm{sgn}(t)}{1+|t|}e^{-2i\pi t\xi}\,\mathrm{d}t &= \int_{-R}^R\int_0^{+\infty} \mathrm{sgn}(t)e^{-(1+|t|)x}\,\mathrm{d}x e^{-2i\pi t\xi}\,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^{+\infty}\int_{-R}^R \mathrm{sgn}(t)e^{-(1+|t|)x}e^{-2i\pi t\xi}\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}x \\
&= \int_0^{+\infty} e^{-x}\int_{-R}^R \mathrm{sgn}(t)e^{-|t|x}e^{-2i\pi t\xi}\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}x \qquad (3.4)
\end{aligned}$$

Pour vérifier qu'on a le droit d'utiliser Fubini, on écrit $|\,\mathrm{sgn}(t)e^{-(1+|t|)x}e^{-2i\pi t\xi}| = e^{-(1+|t|)x} \leqslant e^{-x} \in L^1([-R,R]\times\mathbb{R}, \mathrm{d}t\,\mathrm{d}x)$. Mais alors, si $\xi \neq 0$, (ou si $x \neq 0$)

$$\begin{aligned}
\int_{-R}^R \mathrm{sgn}(t)e^{-|t|x}e^{-2i\pi t\xi}\,\mathrm{d}t &= -\int_{-R}^0 e^{t(x-2i\pi\xi)}\,\mathrm{d}t + \int_0^R e^{-t(x+2i\pi\xi)}\,\mathrm{d}t \\
&= \left[-\frac{e^{t(x-2i\pi\xi)}}{x-2i\pi\xi}\right]_{-R}^0 + \left[-\frac{e^{-t(x+2i\pi\xi)}}{x+2i\pi\xi}\right]_0^R \\
&= \frac{-1+e^{-R(x-2i\pi\xi)}}{x-2i\pi\xi} + \frac{1-e^{-R(x+2i\pi\xi)}}{x+2i\pi\xi} = \frac{-4i\pi\xi}{x^2+(2\pi\xi)^2} + \frac{e^{-R(x-2i\pi\xi)}}{x-2i\pi\xi} - \frac{e^{-R(x+2i\pi\xi)}}{x+2i\pi\xi}.
\end{aligned}$$

En insérant cela dans (3.4) on obtient

$$\int_{-R}^{R} \frac{\operatorname{sgn}(t)}{1+|t|} e^{-2i\pi t\xi}\,\mathrm{d}t = -4i\pi\xi \int_0^{+\infty} \frac{e^{-x}}{x^2+(2\pi\xi)^2}\,\mathrm{d}x + \int_0^{+\infty} \left(\frac{e^{-R(x-2i\pi\xi)}}{x-2i\pi\xi} - \frac{e^{-R(x+2i\pi\xi)}}{x+2i\pi\xi} \right) e^{-x}\,\mathrm{d}x.$$

Mais, si $x > 0$

$$\frac{e^{-R(x-2i\pi\xi)}}{x-2i\pi\xi} - \frac{e^{-R(x+2i\pi\xi)}}{x+2i\pi\xi} \to 0$$

quant $R \to +\infty$ alors que, si $\xi \neq 0$,

$$\begin{aligned} \left| \left(\frac{e^{-R(x-2i\pi\xi)}}{x-2i\pi\xi} - \frac{e^{-R(x+2i\pi\xi)}}{x+2i\pi\xi} \right) e^{-x} \right| &\leqslant \left(\frac{e^{-Rx}}{|x-2i\pi\xi|} + \frac{e^{-Rx}}{|x+2i\pi\xi|} \right) e^{-x} \\ &\leqslant \frac{e^{-x}}{\pi\xi} \in L^1(\mathbb{R}). \end{aligned}$$

En appliquant le théorème de convergence dominée,* on obtient pour $\xi \neq 0$

$$\int_0^{+\infty} \left(\frac{e^{-R(x-2i\pi\xi)}}{x-2i\pi\xi} - \frac{e^{-R(x+2i\pi\xi)}}{x+2i\pi\xi} \right) e^{-x}\,\mathrm{d}x \to 0$$

quand $R \to +\infty$. Ainsi

$$\lim_{R\to+\infty} \int_{-R}^{R} \frac{\operatorname{sgn}(t)}{1+|t|} e^{-2i\pi t\xi}\,\mathrm{d}t = 4i\pi\xi \int_0^{+\infty} \frac{e^{-x}}{x^2+(2\pi\xi)^2}\,\mathrm{d}x.$$

Mais, la limite L^2 de cette intégrale (vue comme fonction de ξ) est la transformée de Fourier de f. Il en résulte que, pour presque tout ξ,

$$\hat{f}(\xi) = -4i\pi\xi \int_0^{+\infty} \frac{e^{-x}}{x^2+(2\pi\xi)^2}\,\mathrm{d}x = -2i\operatorname{sgn}(\xi) \int_0^{+\infty} \frac{e^{-2\pi|\xi|u}}{u^2+1}\,\mathrm{d}u$$

avec le changement de variable $x = 2\pi|\xi|u$.

Observons que cette fonction est continue sauf en 0 où elle a un saut et converge vers 0 en l'infini. Cela résulte du théorème de Lebesgue: écrivons $F(\xi,u) = \dfrac{e^{-2\pi|\xi|u}}{u^2+1}$ et notons que

– $|F(\xi,u)| = \left|\dfrac{e^{-2\pi|\xi|u}}{u^2+1}\right| \leqslant \dfrac{1}{1+u^2} \in L^1(\mathbb{R}^+)$;

– pour u fixé, $\xi \to F(\xi,u)$ est continue donc $\xi \to \displaystyle\int_0^{+\infty} F(\xi,u)\,\mathrm{d}u$ est continue sur $\mathbb{R}$. En particular $\displaystyle\int_0^{+\infty} F(0,u)\,\mathrm{d}u = \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+u^2}\,\mathrm{d}u = \frac{\pi}{2}$

– Pour $u > 0$, $F(\xi,u) \to 0$ quand $\xi \to \pm\infty$. Ainsi $\displaystyle\int_0^{+\infty} F(\xi,u)\,\mathrm{d}u \to 0$.

---

*On peut aussi vérifier plus directement que $\left|\left(\frac{e^{-R(x-2i\pi\xi)}}{x-2i\pi\xi} - \frac{e^{-R(x+2i\pi\xi)}}{x+2i\pi\xi}\right)e^{-x}\right| \leqslant \frac{e^{-x}}{\pi\xi} e^{-Rx}$ donc que $\left|\int_0^{+\infty} \left(\frac{e^{-R(x-2i\pi\xi)}}{x-2i\pi\xi} - \frac{e^{-R(x+2i\pi\xi)}}{x+2i\pi\xi}\right) e^{-x}\,\mathrm{d}x\right| \leqslant \int_0^{+\infty} \frac{e^{-x}}{\pi\xi} e^{-Rx}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi\xi(1+R)} \to 0$.

Ainsi $\hat{f}(\xi) = -2i\,\mathrm{sgn}(\xi)\displaystyle\int_0^{+\infty} F(\xi,u)\,\mathrm{d}u$ a les propriétés annoncées avec $\hat{f}(0^+) = -\hat{f}(0^-) = -i\pi$.

Notons aussi que $\lim_{R\to+\infty}\int_{-R}^{R} f(t)\,\mathrm{d}t = 0$ puisque f est impaire.

Il ne reste plus qu'à corriger cette discontinuité de saut à l'aide de l'exemple précédent. Soit $g = f - i\pi(c_1^+ - c_1^-) = \frac{\mathrm{sgn}(t)}{1+|t|} - \frac{4\pi t}{1+(2\pi t)^2}$. Notons que $g(t) \sim 3\,\mathrm{sgn}(t)/t$ en $\pm\infty$ donc $g \in L^2(\mathbb{R})$ mais n'est pas dans $L^1(\mathbb{R})$. Par linérité $\hat{g} = \hat{f} - i\pi e_1^+ + i\pi e_1^-$. Les fonctions $\hat{f}, e_1^+, e_1^-$ sont toutes 3 continues sauf en 0 où elles ont un saut. Comme $\hat{f}(0^\pm) = \pm i\pi$, $e_1^\pm(0^\mp) = 0$, $e_1^\pm(0^\pm) = 1$, g a été choisi pour que les sauts se compensent donc g est
15 min continue.

3.3. **Fourier sur L^p.** Cette section est hors programme de l'agrégation. La curiosité peut vous pousser à vous demander si la transformée de Fourier est continue $L^p(\mathbb{R}^d) \to L^q(\mathbb{R}^d)$. Nous avons vu que c'était le cas pour $p = 1$ et $q = +\infty$ et pour $p = q = 2$. Tout d'abord, supposons que ce soit le cas, ainsi, il existerait une constante $C > 0$ telle que $\|\mathcal{F}[f]\|_q \leqslant C\|f\|_p$. Il suffit alors de prendre $f = \gamma(\lambda x) = e^{-\pi\lambda^2|x|^2}$ avec $\lambda > 0$ de sorte que $\mathcal{F}[f] = \lambda^{-d}e^{-\pi|x|^2/\lambda^2}$ puis de remarquer que $\|f\|_p = \lambda^{-d/p}\|\gamma\|_p$ et $\|f\|_q = \lambda^{-d+d/q}\|\gamma\|_q$ (où γ est la gaussienne $\gamma(x) = e^{-\pi x^2}$). Ainsi $\|\mathcal{F}[f]\|_q \leqslant C\|f\|_p$ implique

$$\lambda^{-d+d/q}\|\gamma\|_q \leqslant C\lambda^{-d/p}\|\gamma\|_p \quad \text{pour tout } \lambda > 0.$$

Comme $\|\gamma\|_p, \|\gamma\|_q \neq 0$, on fait tendre λ vers 0 et vers $+\infty$ et on voit qu'une telle inégalité n'est possible que si $-d + d/q = -d/p$, c'est-à-dire si $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$. On remarque que les deux cas particulier ci-dessus correspondent à $p = 1$ et $p = 2$.

Un résultat fin sur les espaces L^p (théorème d'interpolation) permet de montrer que la transformation de Fourier est aussi continue pour les p compris entre 1 et 2. Par ailleurs, un résultat de probabilités (inégalités de Kintchine) permet de montrer que pour $p > 2$, la transformée de Fourier n'est pas continue sur L^p.

Une version un peu plus directe mais techniquement difficile (Beckner, 1975) permet de montrer le résultat suivant

Théorème 3.4 (Hausdorff-Young-Beckner)**.** *La transformée de Fourier se prolonge en un opérateur continu de $L^p(\mathbb{R}^d) \to L^q(\mathbb{R}^d)$ si et seulement si $1 \leqslant p \leqslant 2$ et $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$. Dans ce cas, pour tout $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$, $\|\mathcal{F}[f]\|_q \leqslant \dfrac{\|\gamma\|_q}{\|\gamma\|_p}\|f\|_p$.*

Démonstration dans un cas particulier. Une astuce permet de démontrer partiellement ce résultat lorsque $q = 2k$ est un entier pair, et donc $p = \dfrac{2k}{2k-1}$.

On observe d'abord que, si $f \in \mathcal{S}$ alors $\|\hat{f}\|_q = \big(\|(\hat{f})^k\|_2\big)^{1/k} = \big(\|\mathcal{F}[\underbrace{f * f \cdots * f}_{k \text{ fois}}]\|_2\big)^{1/k}$ avec le théorème de convolution. Comme on a une norme L^2, on peut utiliser Plancherel: $\|\hat{f}\|_q = (\|f * f \cdots * f\|_2)^{1/k}$. Enfin, on utilise l'inégalité de Young (itérée) pour les convolutions $\|f_1 * f_2 * \cdots * f_k\|_r \leqslant \|f_1\|_{p_1}\|f_2\|_{p_2}\cdots\|f_k\|_{p_k}$ si $k - 1 + \dfrac{1}{r} = \displaystyle\sum_{i=1}^{k}\dfrac{1}{p_i}$. Ici tous les $f_i = f$

donc on prend tous les p_i égaux à p et $r = 2$ donc $k - \frac{1}{2} = \frac{k}{p}$ qui donne bien $p = \frac{2k}{2k-1}$.
Au final on a bien $\|\hat{f}\|_q \leqslant \left(\|f\|_p^k\right)^{1/k} = \|f\|_p$. □

4. Une application: résolution de l'équation de la chaleur

20 min

L'objectif de cette section est de montrer comment l'analyse de Fourier peut permettre de résoudre certaines équations aux dérivées partielles. En guise d'exemple, nous nous concentrerons sur l'équation de la chaleur:

$$(E) \qquad \begin{cases} \partial_t u(x,t) & = & \Delta_x(x,t) \\ u(x,0) & = & u_0(x) \end{cases}$$

où $\Delta_x u(x,t) = (\partial_{x_1}^2 + \cdots + \partial_{x_d}^2)u(x,t)$. L'inconnue est une fonction u sur $\mathbb{R}^d \times (0,+\infty)$ où la variable t représente le temps tandis que la variable x est une variable d'espace. Il convient d'interpréter $u(x,0) = u_0(x)$ au sens d'une limite $u(x,0) \to u_0(x)$ quand $t \to 0$ et ce sens sera rendu plus précis plus loin.

Nous allons temporairement nous affranchir de la rigueur mathématique et calculer une transformée de Fourier par rapport à la variable d'espace: pour $\xi \in \mathbb{R}^d$, écrivons $\hat{u}(\xi,t) = \int_{\mathbb{R}^d} u(x,t)e^{-2i\pi\langle x,\xi\rangle}\,\mathrm{d}x$.

Ainsi (du moins si u est une fonction raisonnable), on a

$$(4.5) \qquad \partial_t \hat{u}(\xi,t) = \partial_t \int_{\mathbb{R}^d} u(x,t)e^{-2i\pi\langle x,\xi\rangle}\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^d} \partial_t u(x,t)e^{-2i\pi\langle x,\xi\rangle}\,\mathrm{d}x.$$

À ce stade, nous ne justifions pas le fait que la dérivées puisse être rentrée sous le signe integral. De plus, au moins dans les cas favorables, on peut intégrer par parties et obtenir

$$\int_{\mathbb{R}^d} \partial_{x_i} u(x,t)e^{-2i\pi\langle x,\xi\rangle}\,\mathrm{d}x = -\int_{\mathbb{R}^d} u(x,t)\partial_{x_j} e^{-2i\pi\langle x,\xi\rangle}\,\mathrm{d}x = 2i\pi\xi_j \int_{\mathbb{R}^d} u(x,t)e^{-2i\pi\langle x,\xi\rangle}\,\mathrm{d}x$$

(en supposant ici que u s'annule à l'infini). En répétant cela

$$\int_{\mathbb{R}^d} \partial_{x_i}^2 u(x,t)e^{-2i\pi\langle x,\xi\rangle}\,\mathrm{d}x = -4\pi^2\xi_j^2 \int_{\mathbb{R}^d} u(x,t)e^{-2i\pi\langle x,\xi\rangle}\,\mathrm{d}x$$

et en sommant, on obtient

$$\int_{\mathbb{R}^d} \Delta_x u(x,t)e^{-2i\pi\langle x,\xi\rangle}\,\mathrm{d}x = -4\pi^2|\xi|^2\hat{u}(\xi,t).$$

En tenant compte de (4.5), cela nous permet de ré-écrire (E) sous la forme

$$\begin{cases} \partial_t \hat{u}(\xi,t) & = & -4\pi^2|\xi|^2\hat{u}(\xi,t) \\ \hat{u}(\xi,0) & = & \hat{u}_0(\xi) \end{cases}.$$

Remarquons maintenant que, pour ξ fixé, ceci est une équation différentielle ordinaire qu'il est facile de résoudre. Elle admet pour unique solution

$$\hat{u}(\xi,t) = e^{-4\pi^2|\xi|^2 t}\hat{u}_0(\xi).$$

En se rappelant que $e^{-\pi|x|^2}$ est sa propre transformée de Fourier, un calcul simple montre que, si $p_t(x) = (4\pi t)^{-d/2}e^{-|x|^2/4t}$, alors $\hat{p}_t(\xi) = e^{-4\pi^2|\xi|^2 t}$. Il en résulte que $\hat{u}(\xi,t) =$

$\hat{p}_t(\xi)\hat{u}_0(\xi) = \mathcal{F}[p_t * u_0](\xi)$ avec le théorème de convolution. Il suffit alors d'inverser la transformée de Fourier pour obtenir

$$u(x,t) = p_t * u_0(x) = \int_{\mathbb{R}^d} u_0(y)p_t(x-y)\,\mathrm{d}x. \tag{4.6}$$

Insistons sur le fait, qu'à ce stade, nous n'avons pas montré (rigoureusement) que (4.6) est une solution de l'équation de la chaleur. En effet, nous n'avons justifié aucun des calculs effectués (différentiation d'inégrales, intégration par parties, inversion de Fourier...). Pour cela, il nous faudrait une fonction u_0 assez régulière et décroissante à l'infini. Au lieu de cela, nous allons donc directement montrer que (4.6) est une solution de l'équation de la chaleur c'est-à-dire:

– justifier que c'est bien une solution de $\partial_t u = \Delta_x u$. Pour cela, on vérifie facilement que $p(t,x) = p_t(x-y_0)$ vérifie l'équation de la chaleur. Ensuite on vérifie que $u(x,t) = p_t * u_0$ en montrant qu'on peut intervertir les opérations de dérivation qui apparaissent dans l'équation de la chaleur peuvent être intervertis avec l'intégrale (4.6). Pour cela, on utilise le théorème de différentiation de Lebesgue et le fait que, pour $t_0 < t < t_1$, et tout $\alpha \in \mathbb{N}^{d+1}$ il existe une constante $C = C(\alpha, t_0, t_1)$ telle que $|\partial^\alpha p(t,x)| \leqslant Ce^{-|x|^2/C}$ (ici ∂^α est n'importe quel opérateur de dérivation partiel par rapport aux variables de temps et d'espace).

– On sait alors que $\partial_t u = \Delta_x u$, et on remarque que p_t est une approximation de l'unité de sorte que, si $u_0 \in L^p$ avec $1 \leqslant p < \infty$, alors $p_t * u_0 \to u_0$ dans L^p.

Cette méthode ne permet pas de montrer que toutes les solutions sont de cette forme à moins d'imposer à u des conditions qui imposent que les calculs de transformée de Fourier soient valables.

Une alternative sous une hypothèse raisonnable est la suivante. Pour simplifier un peu, supposons $d = 1$ et, à $t > 0$ fixé, $u(t,x) \to 0$ quand $x \to \pm\infty$ et $\partial_x u(t,x)$ borné.

Soient alors u_1, u_2 deux solutions de l'équation de la chaleur vérifiant ces hypothèses et $v = u_1 - u_2$. Ainsi $\partial_t v = \partial_x^2 v$ avec, pour $t > 0$ fixé $v(t,x)\partial_x v(t,x) \to 0$. On voit aussi que $\Re v$ et $\operatorname{Im} v$ vérifient les mêmes hypothèses, on suppose donc que v est à valeurs réelles. On remarque alors que $\frac{1}{2}\partial_t v^2 = v\partial_t v = v\partial_x^2 v$ donc

$$\begin{aligned}
0 &= \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{2}\partial_t v(t,x)^2 - v(t,x)\partial_x^2 v(t,x)\,\mathrm{d}x \\
&= \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{2}\partial_t v(t,x)^2 + [\partial v(t,x)]^2\,\mathrm{d}x - [v(t,x)\partial_x^2 v(t,x)]_{-\infty}^{+\infty} \\
&= \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{2}\partial_t v(t,x)^2 + [\partial v(t,x)]^2\,\mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

Ainsi, en supposant de plus que, pour t fixé, $v, \partial_t v \in L^2(\mathbb{R})$ (énergie finie), on peut appliquer le théorème de différentiattion

$$\partial_t \int_{\mathbb{R}} v(t,x)^2\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}} \partial_t v(t,x)^2\,\mathrm{d}x \leqslant 0.$$

Mais alors

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} v(t_0,x)^2\,\mathrm{d}x &= \int_{\mathbb{R}} v(0,x)^2\,\mathrm{d}x + \int_0^{t_0} \partial_t \int_{\mathbb{R}} v(t,x)^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \\
&\leqslant \int_{\mathbb{R}} v(0,x)^2\,\mathrm{d}x = 0.
\end{aligned}$$

d'où $\int_{\mathbb{R}} v(t_0, x)^2 \, \mathrm{d}x = 0$ et $v = 0$.

Pour avoir des hypothèses moins restrictives, nous allons introduire la théorie des distributions qui nous permettra de calculer des transformées de Fourier en un sens très faible. Cela nous montrera que toute solution (“au sens des distributions”) est de la forme (4.6) et qu'ainsi, nous avons bien résolu l'équation de la chaleur.

Univ. Bordeaux, IMB, UMR 5251, F-33400 Talence, France. CNRS, IMB, UMR 5251, F-33400 Talence, France.

Email address: `Philippe.Jaming@math.u-bordeaux.fr`