

ANALYSE: CONVERGENCE ET DUALITÉ

PHILIPPE JAMING

Distributions

Avant propos: ce fichier utilise un code de couleur: [des démonstration qui vont](#) (ou [peuvent être](#)) [des exercices des parties plus techniques qui peuvent être omises en première lecture](#).

1. DÉFINITION ET EXEMPLES

Dans ce chapitre, nous adopterons la notation suivante: si X est un espace vectoriel et T une forme linéaire sur X , alors on notera $\langle T, x \rangle = T(x)$ l'image de x par T . La notation provient du théorème de Riesz qui identifie le dual d'un Hilbert avec lui-même (mais en prenant ici la convention que le produit scalaire est linéaire dans la seconde variable).

Définition 1.1. Une distribution $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ est une forme linéaire $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ qui vérifie la propriété de continuité suivante:

pour tout $R > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ et $C > 0$ tels que, pour tout $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ avec $\text{supp } \varphi \subset B(0, R)$,

$$(1.1) \quad |\langle T, \varphi \rangle| \leq C \sup_{\alpha \in \mathbb{N}^d, |\alpha| \leq N} \sup_{x \in \mathbb{R}^d} |\partial^\alpha \varphi(x)|.$$

Si N peut être choisi indépendamment de R , on dira que T est d'ordre fini et le plus petit N possible est appelé l'ordre de T .

Une distribution tempérée $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ est une forme linéaire $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ qui vérifie la propriété de continuité suivante:

il existe $M, N \in \mathbb{N}$ et $D > 0$ tels que, pour tout $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$

$$(1.2) \quad |\langle T, \varphi \rangle| \leq D \sup_{\alpha \in \mathbb{N}^d, |\alpha| \leq N} \sup_{x \in \mathbb{R}^d} (1 + |x|)^M |\partial^\alpha \varphi(x)|.$$

Rappelons que $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^d) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$. De plus, si on fixe $R > 0$ et si $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ avec $\text{supp } \varphi \subset B(0, R)$, alors pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^d$, $\partial^\alpha \varphi(x) = 0$ if $|x| > R$. Il en résulte que

$$(1 + |x|)^M |\partial^\alpha \varphi(x)| \leq (1 + R)^M |\partial^\alpha \varphi(x)|.$$

Ainsi, (1.2) implique (1.1) avec $C = D(1 + R)^M$. En particulier, $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ et T est d'ordre au plus N . Nous venons donc de démontrer le lemme suivant:

Lemme 1.2. Toute distribution tempérée est une distribution d'ordre fini.

En premier lieu, montrons le lemme élémentaire suivant:

Lemme 1.3. $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ et $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ sont des espaces vectoriels.

Démonstration. Soient $T_1, T_2 \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ et $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$. Évidemment $\lambda_1 T_1 + \lambda_2 T_2$ est une forme linéaire sur $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^d)$. Soit alors $R > 0$. Il existe N_1, N_2, C_1, C_2 tels que, si $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ alors

$$\begin{aligned} |\langle T_1, \varphi \rangle| &\leq C_1 \sup_{\alpha \in \mathbb{N}^d, |\alpha| \leq N_1} \sup_{x \in \mathbb{R}^d} |\partial^\alpha \varphi(x)| \\ |\langle T_2, \varphi \rangle| &\leq C_2 \sup_{\alpha \in \mathbb{N}^d, |\alpha| \leq N_2} \sup_{x \in \mathbb{R}^d} |\partial^\alpha \varphi(x)|. \end{aligned}$$

En posant $N = \max(N_1, N_2)$ on a alors

$$|\langle \lambda_1 T_1 + \lambda_2 T_2, \varphi \rangle| \leq (|\lambda_1| C_1 + |\lambda_2| C_2) \sup_{\alpha \in \mathbb{N}^d, |\alpha| \leq N} \sup_{x \in \mathbb{R}^d} |\partial^\alpha \varphi(x)|.$$

Le cas $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ est similaire et laissé en exercice. \square

Avant de continuer, il est primordial de voir qu'une fonction localement intégrable s'identifie à une distribution d'ordre 0.

Exemple 1.4. Fonctions localement intégrables

Soit $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$. Rappelons que cela signifie que pour tout $R > 0$, $f \mathbf{1}_{B(0,R)} \in L^1(\mathbb{R}^d)$. Pour $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^d)$, on définit

$$\langle T_f, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}^d} f(x) \varphi(x) dx.$$

Comme le support de φ est compact, il est inclus dans une boule $B(0, R)$ et alors $|f(x)\varphi(x)| \leq |f| \mathbf{1}_{B(0,R)} \|\varphi\|_\infty \in L^1(\mathbb{R}^d)$ donc T_f est bien définie.

De plus, T_f détermine f . En effet, fixons $\varphi \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^d)$ avec $\text{supp } \varphi \subset B(0, 1)$. Soit $\varphi_t(x) = t^{-d} \varphi(x/t)$ donc $\varphi_t(x) = 0$ si $|x| \geq t$. Mais alors, pour $0 < t < 1$ et $y \in B(0, R)$, $\varphi_t(y-x) = 0$ if $|x| \geq R+1$ puisqu'alors $|y-x| \geq |x| - |y| \geq R+1 - R = 1 \geq R$. Mais alors

$$\begin{aligned} \mathbf{1}_{B(0,R)}(y) \int_{\mathbb{R}^d} f(x) \varphi_t(y-x) dx &= \mathbf{1}_{B(0,R)}(y) \int_{\mathbb{R}^d} \mathbf{1}_{B(0,R+1)}(x) f(x) \varphi_t(y-x) dx \\ &= \mathbf{1}_{B(0,R)}(y) (\mathbf{1}_{B(0,R+1)} f) * \varphi_t(y). \end{aligned}$$

Mais maintenant $\mathbf{1}_{B(0,R+1)} f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ de sorte que $(\mathbf{1}_{B(0,R+1)} f) * \varphi_t \rightarrow \mathbf{1}_{B(0,R+1)} f$ dans L^1 quand $t \rightarrow 0$. Il existe donc une suite $t_j \rightarrow 0$ telle que $\mathbf{1}_{B(0,R)}(y) (\mathbf{1}_{B(0,R+1)} f) * \varphi_{t_j} \rightarrow \mathbf{1}_{B(0,R)}(y) \mathbf{1}_{B(0,R+1)} f = \mathbf{1}_{B(0,R)}(y) f$ presque partout.

Ainsi f est déterminé presque partout sur $B(0, R)$ par T_f . Comme R est arbitraire, on en déduit que f est déterminé presque partout sur \mathbb{R}^d par T_f .

Finalement, si on fixe $R > 0$ alors pour tout $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty$ avec $\text{supp } \varphi \subset B(0, R)$,

$$\begin{aligned} |\langle T_f, \varphi \rangle| &= \left| \int_{\mathbb{R}^d} f(x) \varphi(x) dx \right| = \left| \int_{B(0,R)} f(x) \varphi(x) dx \right| \leq \int_{B(0,R)} |f(x) \varphi(x)| dx \\ &\leq \int_{B(0,R)} |f(x)| dx \sup_{x \in \mathbb{R}^d} |\varphi(x)|. \end{aligned}$$

Ceci montre que T_f est une distribution d'ordre 0.

Notons que, pour obtenir une distribution tempérée, il faut supposer une peu plus. Par exemple $f = e^{x^2}$ est localement intégrable et $e^{-x^2} \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ mais $\langle T_f, e^{-x^2} \rangle = \int_{\mathbb{R}} e^{x^2} e^{-x^2} dx = +\infty$, donc T_f n'est pas une distribution tempérée.

Par contre, si on suppose que f est tempérée dans le sens où il existe un entier m tel que $\int_{\mathbb{R}^d} \frac{|f(x)|}{(1+|x|)^m} dx < +\infty$ alors T_f est une distribution tempérée puisque

$$\begin{aligned} |\langle T_f, \varphi \rangle| &= \left| \int_{\mathbb{R}^d} f(x) \varphi(x) dx \right| \leq \int_{\mathbb{R}^d} \frac{|f(x)|}{(1+|x|)^m} (1+|x|)^m |\varphi(x)| dx \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^d} \frac{|f(x)|}{(1+|x|)^m} dx \sup_{x \in \mathbb{R}^d} (1+|x|)^m |\varphi(x)|. \end{aligned}$$

En résumé

Lemme 1.5. Pour $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$, définissons $T_f : \varphi \rightarrow \langle T_f, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}^d} f(x) \varphi(x) dx$. Alors $T_f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$, est d'ordre 0 et $f \rightarrow T_f$ est injective.

De plus, si f est tempérée dans le sens où il existe un entier m tel que $\int_{\mathbb{R}^d} \frac{|f(x)|}{(1+|x|)^m} dx < +\infty$ alors $T_f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$.

Nous laissons en exercice de montrer que si on définit $\langle T_\mu, f \rangle = \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(x) d\mu(x)$ où μ est une mesure localement finie, i.e. $\mu(B(0, R)) < +\infty$ pour tout $R > 0$. Dans ce cas, $T_\mu \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ est d'ordre 0. Si de plus la mesure μ est tempérée: il existe un entier m tel que $\int_{\mathbb{R}^d} \frac{d\mu(x)}{(1+|x|)^m} < +\infty$, alors $T_\mu \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$.

Exemple 1.6. Masse de Dirac

La masse de Dirac ou "fonction" δ de Dirac est définie comme suit: pour $x_0 \in \mathbb{R}^d$ et $\varphi \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^d)$, on note $\langle \delta_{x_0}, \varphi \rangle = \varphi(x_0)$. Ceci est une mesure finie (donc tempérée) et définit une distribution tempérée d'ordre 0.

Les mesures (positives) font partie d'une classe particulière de distributions:

Définition 1.7. Une distribution $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ est dite positive et notée $T \geq 0$ si, pour tout $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ avec $\varphi \geq 0$, on a $\langle T, \varphi \rangle \geq 0$.

Lemme 1.8. Une distribution positive est d'ordre 0.

Démonstration. Soit T une distribution positive et $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^d)$. Soit $R > 0$ tel que $\varphi(x) = 0$ quand $|x| \geq R$ et soit $\psi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ tel que $\psi(x) = 1$ si $|x| \leq R$. Définissons $f_\pm = \|\varphi\|_\infty \psi \pm \varphi$ et remarquons que $f_\pm \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ avec $f_\pm \geq 0$. Par suite

$$0 \leq \langle T, f_\pm \rangle = \langle T, \|\varphi\|_\infty \psi \pm \varphi \rangle = \|\varphi\|_\infty \langle T, \psi \rangle \pm \langle T, \varphi \rangle.$$

Ainsi

$$|\langle T, \varphi \rangle| \leq \langle T, \psi \rangle \|\varphi\|_\infty$$

et donc T est bien d'ordre 0. Notons que la "constante" $\langle T, \psi \rangle$ dépend de ψ qui dépend de R . \square

L'exemple suivant est un des exemples fondamentaux de distributions

Exemple 1.9. Valeur principale

Remarquons tout d'abord $f : x \rightarrow 1/x$ n'est pas dans $L^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$ et ne définit donc pas une distribution T_f comme dans l'exemple 1.4. Nous allons donc proposer un substitut:

Pour $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, soit

$$\langle \text{vp } \frac{1}{x}, \varphi \rangle = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{|x| \geq \varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x} dx.$$

Il est primordial de comprendre que cette limite n'est pas $\int_{\mathbb{R}} \frac{\varphi(x)}{x} dx$ puisque cette intégrale diverge quand $\varphi(0) \neq 0$. Pour montrer que la limite existe et donc que vp est bien défini, nous allons utiliser de façon cruciale qu'on intègre sur l'ensemble symétrique $(-\infty, -\varepsilon] \cup [\varepsilon, +\infty)$ et que $1/x$ est impaire. On écrit alors

$$\int_{|x| \geq \varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x} dx = \int_{\varepsilon \leq |x| \leq 1} \frac{\varphi(x)}{x} dx + \int_{|x| \geq 1} \frac{\varphi(x)}{x} dx.$$

Pour la seconde intégrale, écrivons $\varphi(x) = x^{-1}x\varphi(x)$ et utilisons le fait que $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, donc que $x\varphi$ est bornée. Alors

$$\left| \int_{|x| \geq 1} \frac{\varphi(x)}{x} dx \right| \leq \int_{|x| \geq 1} \frac{dx}{x^2} \sup_{x \in \mathbb{R}} |x\varphi(x)| = 2 \sup_{x \in \mathbb{R}} |x\varphi(x)|.$$

Pour la première intégrale, on utilise le fait que*

$$\int_{\varepsilon \leq |x| \leq 1} \frac{dx}{x} = \int_{-1}^{-\varepsilon} \frac{dx}{x} + \int_{\varepsilon}^1 \frac{dx}{x} = 0.$$

Mais alors

$$\int_{\varepsilon \leq |x| \leq 1} \frac{\varphi(x)}{x} dx = \int_{\varepsilon \leq |x| \leq 1} \frac{\varphi(x)}{x} dx - \varphi(0) \int_{\varepsilon \leq |x| \leq 1} \frac{dx}{x} = \int_{\varepsilon \leq |x| \leq 1} \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x} dx.$$

Mais, comme $\varphi \in \mathcal{C}^1$, $x \rightarrow \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x}$ est continue. De plus, l'inégalité des accroissements finis nous dit que $\left| \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x} \right| \leq \sup_{t \in \mathbb{R}} |\varphi'(t)|$. Il en résulte que

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\varepsilon \leq |x| \leq 1} \frac{\varphi(x)}{x} dx = \int_{-1}^1 \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x} dx.$$

et que

$$\left| \int_{-1}^1 \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x} dx \right| \leq 2 \sup_{t \in \mathbb{R}} |\varphi'(t)|.$$

En regroupant les deux estimations, on a

$$|\langle \text{vp } \frac{1}{x}, \varphi \rangle| \leq 2 \sup_{t \in \mathbb{R}} |\varphi'(t)| + 2 \sup_{t \in \mathbb{R}} |t\varphi(t)|.$$

*C'est ici qu'interviennent la parité de $1/x$ et la symétrie de l'ensemble d'intégration.

Tout cela montre que $\text{vp} \frac{1}{x}$ est bien une distribution tempérée d'ordre au plus 1 définie par

$$\langle \text{vp} \frac{1}{x}, \varphi \rangle = \int_{-1}^1 \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x} dx + \int_{|x| \geq 1} \frac{\varphi(x)}{x} dx.$$

Pour montrer que l'ordre est exactement 1, considérons une suite de fonctions $\varphi_n \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$ avec $0 \leq \varphi_n \leq 1$, $\text{supp} \varphi_n \subset (0, 2)$ (en particulier $\varphi_n = 0$ au voisinage de 0) et $\varphi_n = 1$ sur $(1/n, 1)$. Alors

$$\langle \text{vp} \frac{1}{x}, \varphi_n \rangle = \int_0^{+\infty} \frac{\varphi_n(x)}{x} dx \geq \int_{1/n}^1 \frac{\varphi_n(x)}{x} dx = \int_{1/n}^1 \frac{1}{x} dx = \ln n \rightarrow +\infty$$

alors que $\|\varphi_n\|_\infty = 1$. Par suite, une inégalité de la forme $\langle \text{vp} \frac{1}{x}, \varphi \rangle \leq C \|\varphi\|_\infty$ ne peut être valide pour toute $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ à support dans $[-2, 2]$ et $\text{vp} \frac{1}{x}$ n'est pas d'ordre 0.

En particulier, cette distribution n'est pas de la forme T_f avec f localement intégrable.

Notons enfin qu'on aurait aussi pu utiliser la méthode alternative suivante: si $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ est à support $[-R, R]$,

$$\begin{aligned} \int_{\varepsilon \leq |x| \leq R} \frac{\varphi(x)}{x} dx &= \int_{\varepsilon \leq |x| \leq R} \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x} dx \\ &= \int_{-R}^{-\varepsilon} \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x} dx + \int_{\varepsilon}^R \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x} dx \\ &= - \int_R^{\varepsilon} \frac{\varphi(-x) - \varphi(0)}{-x} dx + \int_{\varepsilon}^R \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x} dx \\ &= \int_{\varepsilon}^R \frac{\varphi(x) - \varphi(-x)}{x} dx. \end{aligned}$$

Enfin, $\frac{\varphi(x) - \varphi(-x)}{x} \sim 2\varphi'(0)$ quand $x \rightarrow 0$ et est donc intégrable sur \mathbb{R} (c'est encore une fonction \mathcal{C}_c^∞). Donc on peut faire tendre $\varepsilon \rightarrow 0$ et on obtient

$$(1.3) \quad \langle \text{vp} \frac{1}{x}, \varphi \rangle = \int_0^{+\infty} \frac{\varphi(x) - \varphi(-x)}{x} dx.$$

Cette formule est également valable si $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ puisque cette intégrale est clairement convergente.

Maintenant que nous disposons de plusieurs exemples, remarquons qu'une distribution est continue au sens suivant:

On dira que $\varphi_n \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ converge vers φ dans $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ si

- (i) $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^d)$;
- (ii) il existe $R > 0$ tel que, pour tout n , φ_n est à support dans $B(0, R)$;
- (iii) pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^d$, $\partial^\alpha \varphi_n \rightarrow \partial^\alpha \varphi$ uniformément sur \mathbb{R}^d .

Il en résulte que si $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ alors $\langle T, \varphi_n \rangle \rightarrow \langle T, \varphi \rangle$. En effet, on prend $R > 0$ tel que φ_n, φ sont à support dans $B(0, R)$ et alors, il existe $N > 0$ tel que

$$|\langle T, \varphi_n \rangle - \langle T, \varphi \rangle| = |\langle T, \varphi_n - \varphi \rangle| \leq C \sup_{|\alpha| \leq N} \|\partial^\alpha [\varphi_n - \varphi]\| \rightarrow 0.$$

On dira que $\varphi_n \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ converge vers φ si $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ et, pour tout entier M et tout $\alpha \in \mathbb{N}^d$, $(1 + |x|)^M \partial^\alpha \varphi_n \rightarrow (1 + |x|)^M \partial^\alpha \varphi$ uniformément sur \mathbb{R}^d . Comme précédemment, si $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ on a alors $\langle T, \varphi_n \rangle \rightarrow \langle T, \varphi \rangle$.

Donnons enfin deux exemples fondamentaux:

Exemple 1.10. Si $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, alors il existe une suite $\varphi_n \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ telle que $\varphi_n \rightarrow \varphi$ dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$.

En effet, on prend χ une fonction “plateau” \mathcal{C}^∞ qui vaut 1 sur $B(0, 1)$ et 0 en-dehors de $B(0, 2)$ et $0 \leq \chi \leq 1$ (on a vu que cela existe au chapitre sur la convolution). On définit $\chi_n(x) = \chi(x/n)$ de sorte que $\chi_n \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ et $\chi_n(x) = 1$ sur $B(0, n)$. On pose alors $\varphi_n = \varphi \chi_n \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^d)$. Montrons que $\varphi_n \rightarrow \varphi$ dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$.

On a $\varphi_n = \varphi$ sur $B(0, n)$ et $\varphi_n = 0$ sur $\mathbb{R}^d \setminus B(0, 2n)$ donc

$$\begin{aligned} |\varphi_n(x) - \varphi(x)| &= \begin{cases} 0 & \text{pour } |x| \leq n \\ |1 - \chi_n(x)| |\varphi(x)| & \text{pour } n \leq |x| \leq 2n \\ |\varphi(x)| & \text{pour } |x| \geq 2n \end{cases} \\ &\leq |\varphi(x)| \mathbf{1}_{\mathbb{R}^d \setminus B(0, n)}. \end{aligned}$$

Soit alors $N > 0$, on a

$$(1 + |x|)^N |\varphi_n(x) - \varphi(x)| \leq (1 + |x|)^{N+1} |\varphi(x)| \frac{\mathbf{1}_{\mathbb{R}^d \setminus B(0, n)}}{1 + |x|} \leq \frac{\|(1 + |x|)^{N+1} \varphi(x)\|_\infty}{1 + n}$$

et donc

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^d} (1 + |x|)^N |\varphi_n(x) - \varphi(x)| \rightarrow 0$$

quand $n \rightarrow +\infty$. Regardons alors pour les dérivées: Pour simplifier, regardons uniquement la dimension $d = 1$. Tout d’abord $|\chi'_n(x)| = |\chi'(x/n)/n| \leq \|\chi'\|_\infty$ et $\chi'_n(x) = 0$ sur $[-n, n]$. Ensuite $\varphi'_n(x) = \varphi'(x) \chi_n(x) + \varphi(x) \chi'_n(x)$ donc

$$\begin{aligned} |\varphi'_n(x) - \varphi'(x)| &= \begin{cases} 0 & \text{pour } |x| \leq n \\ |(1 - \chi_n(x)) \varphi'(x) + \varphi(x) \chi'_n(x)| & \text{pour } n \leq |x| \leq 2n \\ |\varphi'(x)| & \text{pour } |x| \geq 2n \end{cases} \\ &\leq |\varphi'(x)| \mathbf{1}_{\mathbb{R}^d \setminus [-n, n]} + |\varphi(x)| \|\chi'\|_\infty \mathbf{1}_{\mathbb{R}^d \setminus [-n, n]}. \end{aligned}$$

On obtient de la même façon que, pour tout $N > 0$, $\sup_{x \in \mathbb{R}} (1 + |x|)^N |\varphi'_n(x) - \varphi'(x)| \rightarrow 0$. Les dérivées d’ordre supérieures se traitent de la même façon en utilisant la formule de Leibnitz.

Cela signifie que si T est une distribution tempérée (donc aussi une distribution), T est entièrement déterminé par $\{\langle T, \varphi \rangle : \varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^d)\}$ *i.e.* par la distribution. On se contentera donc souvent de montrer qu’une distribution est d’une part tempérée et d’autre part qu’elle vérifie une propriété (par exemple le calcul de sa dérivée) pour les fonctions \mathcal{C}^∞ à support compact et non pour tout $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$.

Exemple 1.11. Si $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$ alors

$$\psi_h(x) := \frac{\varphi(x+h) - \varphi(x)}{h} \rightarrow \varphi'(x) \quad \text{quand } h \rightarrow 0$$

est évidemment vrai ponctuellement, mais aussi dans $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$. Ceci se voit en écrivant

$$\frac{\varphi(x+h) - \varphi(x)}{h} = \int_0^1 \varphi'(x+th) dt.$$

On a alors facilement que $\psi_h^{(k)}(x) = \int_0^1 \varphi^{(k+1)}(x+th) dt$ donc

$$\begin{aligned} |\psi_h^{(k)}(x) - \varphi^{(k+1)}(x)| &= \left| \int_0^1 \varphi^{(k+1)}(x+th) - \varphi^{(k+1)}(x) dt \right| \\ &\leq \int_0^1 |\varphi^{(k+1)}(x+th) - \varphi^{(k+1)}(x)| dt \\ &\leq \int_0^1 |h| \sup_{\eta \in [0,h]} |\varphi^{(k+2)}(x+\eta)| dt = |h| \|\varphi^{(k+2)}\|_\infty \end{aligned}$$

avec l'inégalité des accroissements finis. Donc $\|\psi_h^{(k)} - \varphi^{(k+1)}\|_\infty \leq |h| \|\varphi^{(k+2)}\|_\infty \rightarrow 0$ quand $h \rightarrow 0$.

Si $\varphi \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ on a aussi $\psi_h \rightarrow \varphi'$ dans \mathcal{S}' . Pour cela, on reprend le calcul précédent. Si $|h| \leq 1/2$, alors[†]

$$\begin{aligned} (1+|x|)^M |\psi_h^{(k)}(x) - \varphi^{(k+1)}(x)| &\leq C \int_0^1 |h| \sup_{\eta \in [0,h]} (1+|x|)^M |\varphi^{(k+2)}(x+\eta)| dt \\ &\leq C|h| \int_0^1 \sup_{\eta \in [0,h]} (1+|x+\eta|)^M |\varphi^{(k+2)}(x+\eta)| dt \\ &\leq C|h| \sup_{y \in \mathbb{R}} (1+|y|)^M |\varphi^{(k+2)}(y)| \rightarrow 0. \end{aligned}$$

2. CONVERGENCE DE SUITES DE DISTRIBUTIONS

Définition 2.1. Soient $(T_n)_{n \geq 0}$ et T des distributions, $T_n, T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$. on dit que $T_n \rightarrow T$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ si, pour tout $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^d)$, $\langle T_n, \varphi \rangle \rightarrow \langle T, \varphi \rangle$.

Soient $(T_n)_{n \geq 0}$ et T des distributions tempérées, $T_n, T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$. On dit que $T_n \rightarrow T$ dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ si, pour tout $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, $\langle T_n, \varphi \rangle \rightarrow \langle T, \varphi \rangle$.

Il est évident que la convergence dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ implique la convergence dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ puisque $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^d) \subset \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$.

Nous avons défini la convergence de suites de distributions pour des raisons de simplicité. La convergence d'une famille de distributions indexées par un paramètre continu est similaire.

Voici deux exemples fondamentaux:

Exemple 2.2. Peigne de Dirac.

Soit $T_n = \sum_{k=-n}^n \delta_k$. Définissons $T = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \delta_k$ comme suit:

[†]nous allons ici utiliser le fait qu'il existe une constante $C > 0$ dépendant de M telle que, si $\eta \in [-1/2, 1/2]$ alors $(1+|x|)^M \leq C(1+|x+\eta|)^M$. En effet, si $|x| \leq 1$, $(1+|x|)^M \leq 2^M \leq 2^M(1+|x+\eta|)^M$ et si $|x| \geq 1$, $1+|x+\eta| \geq |x| - |\eta| \geq |x| - \frac{1}{2} \geq \frac{|x|}{2}$ donc $(1+|x|)^M \leq 2^M |x|^M = 2^{2M} \left(\frac{|x|}{2}\right)^M \leq 2^{2M} (1+|x+\eta|)^M$

– Il est facile de définir T comme forme linéaire sur $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$: si $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$, il existe un entier N tel que $\varphi(x) = 0$ si $|x| \geq N + 1$. Par suite, pour $|n| > N$, $\langle \delta_n, \varphi \rangle = \varphi(n) = 0$ et on définit

$$\langle T, \varphi \rangle = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \langle \delta_k, \varphi \rangle = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \varphi(k) = \sum_{|k| \leq N} \varphi(k)$$

i.e. $\langle T, \varphi \rangle = \langle T_N, \varphi \rangle$. Il en résulte que

$$|\langle T, \varphi \rangle| = |\langle T_N, \varphi \rangle| \leq \sum_{|k| \leq N} |\varphi(k)| \leq (2N + 1) \|\varphi\|_\infty.$$

En particulier, $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ est une distribution d'ordre 0 et $T_n \rightarrow T$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$. – Il faut être un peu plus prudent pour $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$. Dans ce cas, $|\varphi(x)| \leq (1 + |x|)^{-2} \sup_{x \in \mathbb{R}} (1 + |x|)^2 |\varphi(x)|$ donc

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} |\varphi(k)| = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{1}{1 + k^2} (1 + k^2) |\varphi(k)| \leq \sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{1}{1 + k^2} \sup_{x \in \mathbb{R}} (1 + |x|)^2 |\varphi(x)| < +\infty.$$

donc la série $\sum \varphi(k)$ est absolument convergente. On peut donc définir $\langle T, \varphi \rangle = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \varphi(k)$

et nous venons de voir qu'il existe $C > 0$ tel que $|\langle T, \varphi \rangle| \leq C \sup_{x \in \mathbb{R}} (1 + |x|)^2 |\varphi(x)|$ pour tout $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. Ainsi on a en fait $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ (et est toujours d'ordre 0). De plus, pour tout $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$,

$$\langle T_n, \varphi \rangle = \sum_{|k| \leq n} \varphi(k) \rightarrow \sum_{k \in \mathbb{Z}} \varphi(k) = \langle T, \varphi \rangle$$

donc $T_n \rightarrow T$ dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$.

Pour les physiciens, la fonction δ de Dirac en x_0 est une “fonction” qui vaut $+\infty$ en x_0 et 0 ailleurs. Ainsi, le peigne de Dirac est la “fonction” qui vaut $+\infty$ sur les entiers et 0 ailleurs (d'où son nom de peigne). Bien sûr, cette définition est insuffisante et l'argument ci-dessus permet de donner une définition rigoureuse.

Exemple 2.3. Approximation de l'unité

Soit $g \in L^1(\mathbb{R}^d)$ une fonction telle que $\int_{\mathbb{R}^d} g(x) dx = 1$ et soit $g_n = n^d g(nx)$. Nous avons vu au chapitre sur la convolution que, si $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \subset \mathcal{C}_0(\mathbb{R}^d)$ avec $\check{\varphi}(x) = \varphi(-x)$ alors $g_n * \check{\varphi} \rightarrow \check{\varphi}$ uniformément. En particulier, $g_n * \check{\varphi}(0) \rightarrow \check{\varphi}(0) = \varphi(0) = \langle \delta_0, \varphi \rangle$. Mais

$$g_n * \check{\varphi}(0) = \int_{\mathbb{R}^d} g_n(y) \check{\varphi}(0 - y) dy = \int_{\mathbb{R}^d} g_n(y) \varphi(y) dy = \langle T_{g_n}, \varphi \rangle.$$

Donc $T_{g_n} \rightarrow \delta_0$ qu'on note habituellement $g_n \rightarrow \delta_0$. Cette convergence est dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$.

Notons que $|g_n(x)| = n^d |g(nx)| \leq C n^d (1 + |nx|)^{-d-1} \rightarrow 0$ pour tout $x \neq 0$. Ainsi $g_n \rightarrow 0$ presque partout mais on n'a pas $g_n \rightarrow 0$ dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$.

Exemple 2.4. Convergence faible dans L^p .

Soient $1 < p, p' < +\infty$ avec $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$. Soient $f_n, f \in L^p(\mathbb{R}^d)$ et supposons que $f_n \rightharpoonup f$ *i.e.*

faiblement dans L^p . En d'autres termes $\int_{\mathbb{R}^d} f_n(x) \varphi(x) dx \rightarrow \int_{\mathbb{R}^d} f(x) \varphi(x) dx$ pour tout $\varphi \in L^{p'}(\mathbb{R}^d)$.

Comme $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \subset L^{p'}(\mathbb{R}^d)$, il en résulte que $\langle T_{f_n}, \varphi \rangle \rightarrow \langle T_f, \varphi \rangle$ pour tout $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, donc $T_{f_n} \rightarrow T_f$ dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$.

Notons que si $f_n \in L^p_{loc}$ converge dans L^p_{loc} vers un $f \in L^p_{loc}$ alors $f_n \rightarrow f$ au sens des distributions *i.e.* dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$. En effet, la convergence dans L^p_{loc} signifie que, pour tout $R > 0$, $f_n \mathbf{1}_{B(0,R)}$ converge vers $f \mathbf{1}_{B(0,R)}$ dans L^p (fortement) donc encore faiblement donc aussi dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$. Mais alors, si $\varphi \in \mathcal{C}^\infty_c(\mathbb{R}^d)$, il existe $R > 0$ tel que $\text{supp } \varphi \subset B(0, R)$. Il vient alors

$$\langle f_n, \varphi \rangle = \langle f_n \mathbf{1}_{B(0,R)}, \varphi \rangle \rightarrow \langle f \mathbf{1}_{B(0,R)}, \varphi \rangle = \langle f, \varphi \rangle.$$

Exemple 2.5. Let $\omega \in \mathbb{R}^d$ avec $|\omega| = 1$. Considérons les fonctions f_n définies sur \mathbb{R}^d par $f_n(x) = e^{-2i\pi\langle x, n\omega \rangle}$ et soit $T_n = T_{f_n}$. Alors, pour $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$,

$$\langle T_n, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(x) e^{-2i\pi\langle x, n\omega \rangle} dx = \hat{\varphi}(n\omega) \rightarrow 0$$

d'après le lemme de Riemann-Lebesgue. Dans $T_n \rightarrow 0$ au sens des distributions.

Enfin, notons que si, pour tout $\varphi \in \mathcal{C}^\infty_c(\mathbb{R}^d)$ —resp. tout $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ — la limite $\langle T, \varphi \rangle := \lim \langle T_n, \varphi \rangle$ existe, alors ceci définit une forme linéaire sur $\mathcal{C}^\infty_c(\mathbb{R}^d)$ —resp. sur $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$. Il résulte d'une version finie du théorème de Banach-Steinhaus (adaptée aux semi-normes plutôt que celle sur les espaces normés que nous verrons au second semestre) que

Théorème 2.6. Soit (T_n) une suite $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$. Supposons que pour $\varphi \in \mathcal{C}^\infty_c(\mathbb{R}^d)$, $\langle T_n, \varphi \rangle$ a une limite et définissons $\langle T, \varphi \rangle = \lim_{n \rightarrow +\infty} \langle T_n, \varphi \rangle$. Alors $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$.

Soit (T_n) une suite $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$. Supposons que pour $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, $\langle T_n, \varphi \rangle$ a une limite et définissons $\langle T, \varphi \rangle = \lim_{n \rightarrow +\infty} \langle T_n, \varphi \rangle$. Alors $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$.

Nous admettrons ce théorème.

3. OPÉRATIONS SUR LES DISTRIBUTIONS

3.1. Translation, dilatation, multiplication par une fonction régulière. Rappelons que pour $a, \omega \in \mathbb{R}^d$, $\lambda > 0$, $A \in GL_n(\mathbb{R}^d)$ (une matrice $d \times d$ inversible) et f une fonction sur \mathbb{R}^d , nous avons défini de nouvelles fonctions sur \mathbb{R}^d

$$\tau_a f(x) = f(x - a), \quad M_\omega f(x) = e^{-2i\pi\langle \omega, x \rangle} f(x), \quad \delta_\lambda f(x) = f(\lambda x), \quad \Delta_A f(x) = f(A^{-1}x).$$

En particulier, si f est localement intégrable, ces nouvelles fonctions sont encore localement intégrables. De plus, elles sont uniquement déterminées par la distribution associée. Par exemple $\tau_a f$ est déterminé par $T_{\tau_a f}$. Mais

$$\langle T_{\tau_a f}, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}^d} f(x - a) \varphi(x) dx = \int_{\mathbb{R}^d} f(y) \varphi(y + a) dy = \langle T_f, \tau_{-a} \varphi \rangle.$$

Ceci sert alors de définition à $\tau_a T$ pour n'importe quelle distribution T : $\langle \tau_a T, \varphi \rangle = \langle T, \tau_{-a} \varphi \rangle$. Montrons que si $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ alors $\tau_a T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$:

La définition a clairement un sens puisque $\tau_{-a} \varphi \in \mathcal{C}^\infty_c(\mathbb{R}^d)$ si $\varphi \in \mathcal{C}^\infty_c(\mathbb{R}^d)$ et $\tau_a T$ est clairement linéaire en φ puisque $\varphi \rightarrow \tau_{-a} \varphi$ est linéaire et T aussi. Enfin, soit $R > 0$. Remarquons que si φ est à support dans $B(0, R)$ alors $\tau_{-a} \varphi$ est à support dans $B(0, R + |a|)$. Mais, il existe $N, C > 0$ tel que si $\psi \in \mathcal{C}^\infty_c(\mathbb{R}^d)$ est à support dans $B(0, R + |a|)$ alors

$$|\langle T, \psi \rangle| \leq C \sup_{|\alpha| \leq N} \|\partial^\alpha \psi\|_\infty.$$

En appliquant cela à $\psi = \tau_{-a} \varphi$ et en remarquant que $\|\partial^\alpha \psi\|_\infty = \|\partial^\alpha \varphi\|_\infty$, il vient

$$|\langle \tau_a T, \varphi \rangle| = |\langle T, \tau_{-a} \varphi \rangle| \leq C \sup_{|\alpha| \leq N} \|\partial^\alpha \varphi\|_\infty.$$

Donc $\tau_a T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ et on voit aussi que l'ordre ne change pas. Le raisonnement pour $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ est identique mais nécessite de plus l'inégalité

$$(1 + |x - a|)^M \leq (1 + |x| + |a|)^M \leq (1 + |a|)^M (1 + |x|)^M$$

qui est évidente avec le binôme de Newton (puisque $(1 + |a|)^k \leq (1 + |a|)^N$ si $k \leq N$) et qui implique

$$\begin{aligned} \sup_{|\alpha| \leq N} \|(1 + |x|)^M \partial^\alpha [\tau_{-a} \varphi]\|_\infty &= \sup_{|\alpha| \leq N} \|(1 + |x - a|)^M \partial^\alpha [\varphi]\|_\infty \\ &\leq (1 + |a|)^M \sup_{|\alpha| \leq N} \|(1 + |x|)^M \partial^\alpha [\varphi]\|_\infty. \end{aligned}$$

Un raisonnement similaire est valable pour les 3 autres transformées et conduit à la définition suivante:

Définition 3.1. Pour $a, \omega \in \mathbb{R}^d$, $\lambda > 0$, $A \in GL_n(\mathbb{R}^d)$ et $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ –resp. $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ –, définissons

- $\tau_a T: \langle \tau_a T, \varphi \rangle = \langle T, \tau_{-a} \varphi \rangle$ pour tout $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ –resp. $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$;
- $M_\omega T: \langle M_\omega T, \varphi \rangle = \langle T, M_\omega \varphi \rangle$ pour tout $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ –resp. $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$;
- $\delta_\lambda T: \langle \delta_\lambda T, \varphi \rangle = \lambda^{-d} \langle T, \delta_{1/\lambda} \varphi \rangle$ pour tout $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ –resp. $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$;
- $\Delta_A T: \langle \Delta_A T, \varphi \rangle = \det(A)^{-1} \langle T, \delta_{A^{-1}} \varphi \rangle$ pour tout $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ –resp. $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$.

Alors $\tau_a T$, $M_\omega T$, $\delta_\lambda T$ et $\Delta_A T$ sont encore dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ –resp. $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ – et ont même ordre que T .

Nous laissons en exercice de vérifier que ces notations sont cohérentes lorsque $T = T_f$ et de montrer que les nouvelles formes linéaires sont bien des distributions (tempérées lorsque celle de départ est tempérée).

Rappelons qu'une fonction f est dite homogène de degré κ si pour tout $x \in \mathbb{R}^d$ et tout $\lambda > 0$, $\delta_\lambda f(x) = f(\lambda x) = \lambda^\kappa f(x)$. À nouveau, si on associe à f une distribution, alors

$$\begin{aligned} \langle T_f, \varphi \rangle &= \int_{\mathbb{R}^d} f(x) \varphi(x) dx = \int_{\mathbb{R}^d} \lambda^{-\kappa} f(\lambda x) \varphi(x) dx \\ &= \lambda^{-\kappa-d} \int_{\mathbb{R}^d} f(y) \varphi(y/\lambda) dy = \lambda^{-\kappa-d} \langle T_f, \delta_{1/\lambda} \varphi \rangle. \end{aligned}$$

En remplaçant λ par $1/\lambda$

Définition 3.2. Une distribution (resp. une distribution tempérée) est dite homogène de degré κ si pour tout $\lambda > 0$ et tout $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^d)$, (resp. tout $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$) $\langle T, \varphi \rangle = \lambda^{\kappa+d} \langle T, \delta_\lambda \varphi \rangle$.

Ainsi, toute fonction localement intégrable homogène de degré κ (par exemple $x \rightarrow x_+^\kappa = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ x^\kappa & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$) est aussi homogène de degré κ en tant que distribution. Il y a d'autres exemples dont le plus important est le suivant:

Exemple 3.3. La masse de Dirac en 0 δ_0 est homogène de degré $-d$:

En effet[‡] $\langle \delta_0, \varphi \rangle = \varphi(0) = \varphi(0/\lambda) = \langle \delta_0, \delta_\lambda \varphi \rangle$ donc

$$\langle \delta_0, \varphi \rangle = \lambda^{-d+d} \langle \delta_0, \delta_\lambda \varphi \rangle.$$

[‡]la notation est ici quelque peu malheureuse puisque δ_0 est la masse de Dirac en 0 et δ_λ l'opération de dilatation.

Parmi les opérations simples, notons qu'on peut multiplier une distribution par une fonction b . L'idée est toujours la même:

$$\langle T_{bf}, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}^d} b(x)f(x)\varphi(x) dx = \int_{\mathbb{R}^d} f(x)b(x)\varphi(x) dx = \langle T_f, b\varphi \rangle.$$

On aimerait donc définir $\langle bT, \varphi \rangle = \langle T, b\varphi \rangle$. L'ennui est que $b\varphi$ ne sera C^∞ à support compact pour toute $\varphi \in C_c^\infty$ à support compact que si b est C^∞ . Pire, $b\varphi$ ne sera dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ pour toute $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ que si b est C^∞ et si b ainsi que toutes ses dérivées sont à croissance au plus polynômiale: pour tout α , il existe C_α, N_α tel que $|\partial^\alpha b(x)| \leq C_\alpha(1 + |x|)^{N_\alpha}$. Sans cela, $\langle T, b\varphi \rangle$ pourrait ne pas avoir de sens.

Remarquons que si $b \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$, $R > 0$ est fixé et $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ est à support dans $B(0, R)$ alors $b\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ est à support dans $B(0, R)$ et

$$\partial^\alpha (b\varphi) = \sum_{\beta \leq \alpha} \binom{\alpha}{\beta} \partial^{\alpha-\beta} b \partial^\beta \varphi$$

donc

$$\|\partial^\alpha (b\varphi)\|_\infty \leq \sum_{\beta \leq \alpha} \binom{\alpha}{\beta} \sup_{\gamma \leq \alpha} \sup_{x \in B(0, R)} |\partial^\gamma b(x)| \sup_{\gamma \leq \alpha} \|\partial^\gamma \varphi\|_\infty$$

donc si $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$, on a

$$\begin{aligned} |\langle bT, \varphi \rangle| &= |\langle T, b\varphi \rangle| \leq C \sup_{|\alpha| \leq N} \|\partial^\alpha (b\varphi)\|_\infty \\ &\leq C \left(\sup_{|\alpha| \leq N} \sum_{\beta \leq \alpha} \binom{\alpha}{\beta} \sup_{\gamma \leq \alpha} \sup_{x \in B(0, R)} |\partial^\gamma b(x)| \right) \sup_{|\alpha| \leq N} \|\partial^\alpha \varphi\|_\infty \end{aligned}$$

et $bT \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$.

Définition 3.4. Soit $b \in C^\infty$ et $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$. Soit bT la forme linéaire définie sur $C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ par $\langle bT, \varphi \rangle = \langle T, b\varphi \rangle$. Alors $bT \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$.

Soit $b \in C^\infty$ telle que pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^d$, il existe $C, N > 0$ tels que $|\partial^\alpha b(x)| \leq C(1 + |x|)^N$ pour tout $x \in \mathbb{R}^d$. Soit $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ et bT la forme linéaire définie sur $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ par $\langle bT, \varphi \rangle = \langle T, b\varphi \rangle$. Alors $bT \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$.

Le cas \mathcal{S}' est similaire au cas \mathcal{D}' et laissé en exercice.

Attention, on ne peut pas (en toute généralité) multiplier des distributions.

Exemple 3.5. Vérifions ce que sont ces opérations pour $T = \delta_\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}^d$: alors pour $a \in \mathbb{R}^d$, $A \in Gl(d)$ et $b \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$

$$\tau_a \delta_\alpha = \delta_{\alpha+a} \quad , \quad \Delta_A \delta_\alpha = \det(A)^{-1} \delta_{A\alpha} \quad , \quad b \delta_\alpha = b(\alpha) \delta_\alpha.$$

En effet, soit $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$

$$\langle \tau_a \delta_\alpha, \varphi \rangle = \langle \delta_\alpha, \tau_{-a} \varphi \rangle = (\tau_{-a} \varphi)(\alpha) = \varphi(\alpha + a) = \langle \delta_{\alpha+a}, \varphi \rangle.$$

Ensuite

$$\begin{aligned} \langle \Delta_A \delta_\alpha, \varphi \rangle &= \det(A)^{-1} \langle \delta_\alpha, \Delta_A \varphi \rangle = \det(A)^{-1} (\Delta_A \varphi)(\alpha) \\ &= \det(A)^{-1} \varphi(A\alpha) = \langle \det(A)^{-1} \delta_{A\alpha}, \varphi \rangle \end{aligned}$$

et

$$\langle b \delta_\alpha, \varphi \rangle = \langle \delta_\alpha, b\varphi \rangle = (b\varphi)(\alpha) = b(\alpha)\varphi(\alpha) = \langle b(\alpha)\delta_\alpha, \varphi \rangle.$$

Exemple 3.6. Nous pouvons maintenant résoudre l'équation $xT = 0$ avec $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

Tout d'abord, cette équation a bien un sens puisque nous avons défini xT par $\langle xT, \varphi \rangle = \langle T, x\varphi \rangle$. On remarque ensuite que si $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$ est tel que $\varphi(0) = 0$ alors on peut écrire $\varphi(x) = x\psi(x)$ avec $\psi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$. En effet, $\psi(x) = \varphi(x)/x = \int_0^1 \varphi'(tx) dt$ est clairement \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R} , à support compact. Donc

$$\langle T, \varphi \rangle = \langle T, x\psi \rangle = \langle xT, \psi \rangle = 0.$$

Soit alors $\chi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$ avec $\chi = 1$ sur $[-1, 1]$ et $\chi = 0$ sur $\mathbb{R} \setminus [-2, 2]$ Soit $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ qu'on peut écrire sous la forme

$$\varphi(t) = \varphi(0)\chi(t) + (\varphi(t) - \varphi(0))\chi(t) + \varphi(t)(1 - \chi(t)).$$

On remarque que $(\varphi(t) - \varphi(0))\chi(t)$ et $\varphi(t)(1 - \chi(t))$ s'annulent en 0 donc

$$\langle T, (\varphi(t) - \varphi(0))\chi(t) \rangle = \langle T, \varphi(t)(1 - \chi(t)) \rangle = 0$$

et par suite

$$\langle T, \varphi \rangle = \langle T, \varphi(0)\chi(t) \rangle + \langle T, (\varphi(t) - \varphi(0))\chi(t) \rangle + \langle T, \varphi(t)(1 - \chi(t)) \rangle = \varphi(0)\langle T, \chi \rangle.$$

En posant $c = \langle T, \chi \rangle$, on en déduit que pour tout φ , $\langle T, \varphi \rangle = c\langle \delta_0, \varphi \rangle$ donc $T = c\delta_0$. Inversement, si $T = c\delta_0$ alors

$$\langle xT, \varphi \rangle = \langle c\delta_0, x\varphi \rangle = 0$$

puisque $x\varphi(x) = 0$ si $x = 0$.

En conclusion:

Une distribution T vérifie $xT = 0$ si et seulement s'il existe $c \in \mathbb{C}$ tel que $T = c\delta_0$.

3.2. Différentiation. Cette opération est la raison d'être des distributions. Commençons donc avec $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ donc $f, f' \in L_{loc}^2(\mathbb{R})$. On peut donc associer une distribution $T_{f'}$ à f' . Celle-ci est définie pour $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$ par

$$\begin{aligned} \langle T_{f'}, \varphi \rangle &= \int_{\mathbb{R}} f'(x)\varphi(x) dx = [f(x)\varphi(x)]_{-\infty}^{+\infty} - \int_{\mathbb{R}} f(x)\varphi'(x) dx \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)\varphi(x) - \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)\varphi(x) - \int_{\mathbb{R}} f(x)\varphi'(x) dx. \end{aligned}$$

Mais φ est à support compact, il existe donc $R > 0$ tel que si $|x| > R$, $\varphi(x) = 0$ donc $\varphi(x)f(x) = 0$. En particulier, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)\varphi(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)\varphi(x) = 0$. Notons que ceci justifie l'intégration par parties et que

$$\langle T_{f'}, \varphi \rangle = - \int_{\mathbb{R}} f(x)\varphi'(x) dx = -\langle T_f, \varphi' \rangle.$$

Nous pouvons utiliser ceci comme définition.

Définition 3.7. Soit $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ – resp. $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ – et $\alpha \in \mathbb{N}^d$. On définit alors $\partial^\alpha T$ par $\langle \partial^\alpha T, \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle T, \partial^\alpha \varphi \rangle$ pour tout $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ – resp. pour tout $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$.

Avant de poursuivre, levons l'ambiguïté éventuelle liée à la notation ∂^α . En effet, si f est une fonction sur \mathbb{R}^2 , on peut avoir $\partial_x \partial_y f \neq \partial_y \partial_x f$. Toutefois, si f est de classe \mathcal{C}^2 , le lemme de Schwartz nous dit que $\partial_x \partial_y f = \partial_y \partial_x f$. Par conséquent si $T \in \mathcal{D}'$ et $\varphi \in \mathcal{C}^\infty$

$$\begin{aligned}\langle \partial_x \partial_y T, \varphi \rangle &= -\langle \partial_y T, \partial_x \varphi \rangle = \langle T, \partial_y \partial_x \varphi \rangle \\ &= \langle T, \partial_x \partial_y \varphi \rangle = -\langle \partial_x T, \partial_y \varphi \rangle = \text{scal} \partial_y \partial_x T, \varphi\end{aligned}$$

où on a utilisé 2 fois la définition de la dérivation puis le lemme de Schwartz pour φ et à nouveau 2 fois la définition de la dérivation. Ainsi

Lemme 3.8 (Lemme de Schwarz pour les distributions). *Soit $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ alors $\partial_{x_i} \partial_{x_j} T = \partial_{x_j} \partial_{x_i} T$.*

Lemme 3.9. *Avec les notations précédentes, si $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ – resp. $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ – alors $\partial^\alpha T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ – resp. $\partial^\alpha T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$.*

De plus, si T est d'ordre N alors $\partial^\alpha T$ est d'ordre $N + |\alpha|$.

Enfin, $T \rightarrow \partial^\alpha T$ est linéaire.

Démonstration. La linéarité est évidente et laissée en exercice.

Le fait que $\partial^\alpha T$ soit bien défini et une forme linéaire sur $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ ou $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ est évident.

Soit $R > 0$, alors il existe C, N tel que, pour tout $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ dont le support est inclus dans $B(0, R)$,

$$|\langle T, \varphi \rangle| \leq C \sup_{|\beta| \leq N} \|\partial^\beta \varphi\|_\infty.$$

En appliquant cela à $\partial^\alpha \varphi$ qui est encore \mathcal{C}^∞ à support dans $B(0, R)$, on obtient

$$|\langle \partial^\alpha T, \varphi \rangle| = |\langle T, \partial^\alpha \varphi \rangle| \leq C \sup_{|\beta| \leq N} \|\partial^{\alpha+\beta} \varphi\|_\infty \leq C \sup_{|\gamma| \leq N+|\alpha|} \|\partial^\gamma \varphi\|_\infty.$$

La propriété de l'ordre en découle également.

Le raisonnement est similaire pour \mathcal{S}' . □

Exemple 3.10. Masse de Dirac

Soit $T = \delta_{x_0}$ la masse de Dirac en x_0 : $\langle \delta_{x_0}, \varphi \rangle = \varphi(x_0)$ pour tout $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$. Alors, pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^d$,

$$\langle \partial^\alpha \delta_{x_0}, \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle \delta_{x_0}, \partial^\alpha \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \partial^\alpha \varphi(x_0).$$

Exemple 3.11. Fonction de Heaviside

La fonction de Heaviside H est définie par $H(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$. (Il s'agit donc d'un

interrupteur, parfois aussi appelé fonction porte: fermé si $x < 0$ ouvert à partir de $x = 0$). Comme H est bornée, elle est localement intégrable et définit donc une distribution T_H dont nous pouvons calculer la dérivée: si $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$ alors

$$\begin{aligned}\langle T_H', \varphi \rangle &= -\langle T_H, \varphi' \rangle = -\int_{\mathbb{R}} H(t) \varphi'(t) dt = -\int_0^{+\infty} \varphi'(t) dt \\ &= [-\varphi(t)]_0^{+\infty} = \varphi(0) = \langle \delta_0, \varphi \rangle\end{aligned}$$

puisque $\varphi(t) \rightarrow 0$ quand $t \rightarrow +\infty$. Ainsi $T_H' = \delta_0$ ce qu'on écrit plus simplement $H' = \delta_0$.

Exemple 3.12. Formule des sauts en dimension 1.

Supposons que f soit une fonction \mathcal{C}^1 par morceaux avec un nombre fini de sauts (de façon générale, une fonction \mathcal{C}^1 par morceaux a au plus un ensemble dénombrable de discontinuités sans point d'accumulation). Notons $a_1 < \dots < a_N$ les points de discontinuité de f . Nous allons noter $a_0 = -\infty$ et $a_{N+1} = +\infty$. Ainsi f est de classe \mathcal{C}^1 sur les intervalles $]a_i, a_{i+1}[$, ($i = 0, \dots, N$) et f ainsi que f' (dérivée usuelle en-dehors des sauts) ont une limite à droite et à gauche en chaque a_i qu'on note $f(a_i^\pm)$ et $f'(a_i^\pm)$. En particulier, $f \in L^1_{loc}$ et définit donc une distribution qu'on notera maintenant T_f . Notons f' la dérivée usuelle de f qui n'est définie que sur $\mathbb{R} \setminus \{a_1, \dots, a_N\}$, qui est aussi dans L^1_{loc} et définit donc aussi une distribution $T_{f'}$. Calculons la dérivée au sens des distributions de T_f . Soit $\varphi \in \mathcal{C}^\infty_c(\mathbb{R})$ et soit $R > 0$ tel que le support de φ soit inclus dans $[-R, R]$. Quitte à remplacer R par une valeur plus grande, on peut supposer que tous les sauts sont dans cet intervalle: $-R < a_1 < a_N < R$. Mais alors

$$\begin{aligned}
\langle f', \varphi \rangle &= -\langle f, \varphi' \rangle = -\int_{\mathbb{R}} f(x)\varphi'(x) dx = -\sum_{i=0}^N \int_{a_i}^{a_{i+1}} f(x)\varphi'(x) dx \\
&= -\int_{-R-1}^{a_1} f(x)\varphi'(x) dx - \sum_{i=1}^{N-1} \int_{a_i}^{a_{i+1}} f(x)\varphi'(x) dx - \int_{a_N}^{R+1} f(x)\varphi'(x) dx \\
&= -[f(x)\varphi(x)]_{-R-1}^{a_1} + \int_{-R-1}^{a_1} f'(x)\varphi(x) dx \\
&\quad - \sum_{i=1}^{N-1} \left([f(x)\varphi(x)]_{a_i}^{a_{i+1}} + \int_{a_i}^{a_{i+1}} f'(x)\varphi(x) dx \right) \\
&\quad - [f(x)\varphi(x)]_{a_N}^{R+1} + \int_{a_N}^{R+1} f'(x)\varphi(x) dx
\end{aligned}$$

avec une intégration par parties sur chaque intervalle. Notons que f restreint à $[a_i, a_{i+1}]$ est une fonction \mathcal{C}^1 qui a donc une dérivée usuelle et c'est cette dernière qui apparaît ici (avec un abus de langage aux points a_i). Nous allons maintenant calculer les termes 'tout intégré' et regrouper ce qui se passe en chaque saut (en remarquant que $\varphi(\pm(R+1)) = 0$) et regrouper les intégrales

$$\begin{aligned}
\langle f', \varphi \rangle &= \sum_{i=1}^N (f(a_i^+) - f(a_i^-))\varphi(a_i) + \int_{-R-1}^{R+1} \sum_{j=0}^{N+1} (f'(x)\varphi(x) dx \\
&= \sum_{i=1}^N (f(a_i^+) - f(a_i^-))\langle \delta_{a_i}, \varphi \rangle + \int_{\mathbb{R}} f'(x)\varphi(x) dx \\
&= \left\langle \sum_{i=1}^N (f(a_i^+) - f(a_i^-))\delta_{a_i} + T_{f'}, \varphi \right\rangle.
\end{aligned}$$

Dans la dernière intégrale, f' est encore la dérivée usuelle et elle n'est pas définie sur l'ensemble de mesure nulle $\{a_1, \dots, a_N\}$ (ce qui ne pose aucun problème définir cette intégrale).

Nous venons donc de montrer

Théorème 3.13 (Formule des sauts en dimension 1). *Soit f une fonction \mathcal{C}^1 par morceaux avec des sauts en a_1, \dots, a_N continue et dérivable à droite et à gauche en chacun de ces points. Alors*

$$T'_f = \sum_{i=1}^N (f(a_i^+) - f(a_i^-)) \delta_{a_i} + T_{f'}$$

Donnons enfin deux propriétés élémentaires de la dérivation:

Lemme 3.14. *Soit $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ et $T_h = \frac{T - \tau_h T}{h}$. Alors $T_h \rightarrow T'$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ quand $h \rightarrow 0$. Si $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ alors $T_h \rightarrow T'$ dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ quand $h \rightarrow 0$.*

Démonstration. En effet, on a

$$\langle T_h, \varphi \rangle = \frac{\langle T, \varphi \rangle - \langle \tau_h T, \varphi \rangle}{h} = \frac{\langle T, \varphi \rangle - \langle T, \tau_{-h} \varphi \rangle}{h} = \left\langle T, \frac{\varphi - \tau_{-h} \varphi}{h} \right\rangle.$$

Mais

$$\frac{\varphi - \tau_{-h} \varphi}{h} = -\frac{\varphi - \tau_{-h} \varphi}{-h} \rightarrow -\varphi'$$

dans $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$ (ou dans $\mathcal{S}(\mathbb{R})$) on a donc bien $\langle T_h, \varphi \rangle \rightarrow \langle T, -\varphi' \rangle = \langle T', \varphi \rangle$. \square

Lemme 3.15. *Si T est homogène de degré κ alors $\partial^\alpha T$ est homogène de degré $\kappa - |\alpha|$*

Démonstration. En effet, si T est homogène de degré κ , $\langle T, \varphi \rangle = \lambda^{\kappa+d} \langle T, \delta_\lambda \varphi \rangle$. Mais alors pour une dérivée d'ordre 1,

$$\langle \partial T, \varphi \rangle = -\langle T, \partial \varphi \rangle = \lambda^{\kappa+d} \langle T, \delta_\lambda \partial \varphi \rangle.$$

Par ailleurs,

$$\delta_\lambda \partial \varphi(x) = \partial \varphi(\lambda x) = \frac{1}{\lambda} \lambda \partial \varphi(\lambda x) = \frac{1}{\lambda} \partial[\delta_\lambda \varphi](x)$$

donc

$$\langle \partial T, \varphi \rangle = -\lambda^{\kappa+d-1} \langle T, \partial[\delta_\lambda \varphi] \rangle = \lambda^{\kappa+d-1} \langle \partial T, \delta_\lambda \varphi \rangle$$

ce qui montre que ∂T est homogène de degré $\kappa - 1$. Une récurrence immédiate donne le résultat. \square

Notons enfin que la formule de Leibnitz reste vraie pour les distributions:

Lemme 3.16. *Soit $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$, $b \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^d)$ et $\alpha \in \mathbb{N}^d$ alors*

$$\partial^\alpha (bT) = \sum_{\beta \leq \alpha} \binom{\alpha}{\beta} \partial^\beta b \partial^{\alpha-\beta} T.$$

Démonstration. On a pour les dérivées d'ordre 1

$$\begin{aligned} \langle \partial_j (bT), \varphi \rangle &= -\langle bT, \partial_j \varphi \rangle = -\langle T, b \partial_j \varphi \rangle \\ &= -\langle T, \partial_j [b\varphi] - (\partial_j b) \varphi \rangle = -\langle T, \partial_j [b\varphi] \rangle + \langle T, (\partial_j b) \varphi \rangle \\ &= \langle \partial_j T, b\varphi \rangle + \langle T, (\partial_j b) \varphi \rangle = \langle b \partial_j T, \varphi \rangle + \langle (\partial_j b) T, \varphi \rangle \\ &= \langle b \partial_j T + (\partial_j b) T, \varphi \rangle. \end{aligned}$$

Ainsi, la formule est vraie lorsque $|\alpha| = 1$. La formule générale s'obtient alors par une récurrence sur $|\alpha|$ exactement comme pour la formule sur les fonctions. \square

Exemple 3.17. Une distribution d'ordre infini

Soit $T = \sum_{k=0}^{+\infty} \delta^k \delta_k$. Alors $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ est une distribution d'ordre infini. En particulier $T \notin \mathcal{S}'(\mathbb{R})$.

En effet, si φ est \mathcal{C}^∞ avec son support $\subset [-R, R]$, $R > 0$ alors $\langle T, \varphi \rangle = \sum_{0 \leq k \leq R} (-1)^k \varphi^{(k)}(k)$.

Cette somme étant finie, $\langle T, \varphi \rangle$ est bien défini. De plus

$$|\langle T, \varphi \rangle| \leq \sum_{0 \leq k \leq R} |\varphi^{(k)}(k)| \leq \sup_{j \leq R} \|\varphi^{(j)}\|_\infty.$$

Donc $T \in \mathcal{D}'$. Ensuite, on prend $\chi \in \mathcal{C}^\infty$ avec $\text{supp } \chi \subset [-1/4, 1/4]$ et $\chi(x) = 1$ sur $[-1/8, 1/8]$. En particulier $\chi(0) = 1$ et $\chi^{(j)}(0) = 0$ si $j \geq 1$. On pose alors $\varphi_n(x) = (x-n)^n \chi(x-n)$. On a $\mathcal{F}_n i^{(k)}(k) = 0$ si $k \neq n$ (k n'est alors pas dans le support de φ_n). Par ailleurs, en posant $\psi(x) = (x-n)^n$, on a $\psi^{(n-j)}(x) = \frac{n!}{j!} (x-n)^j$ donc, en utilisant la formule de Leibnitz, on a

$$\varphi_n^{(n)}(x) = \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} \chi^{(j)}(x-n) \psi^{(n-j)}(x)$$

donc $\varphi_n^{(n)}(n) = n!$ puisque le seul terme non nul est le terme $j = n$. Ainsi $\langle T, \varphi_n \rangle = (-1)^n n!$. Par ailleurs, si on fixe N et qu'on prend $k \leq N$ et qu'on écrit $\chi = \chi \mathbf{1}_{[-1/4, 1/4]}$

$$\begin{aligned} \varphi_n^{(k)}(x) &\leq \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} |\chi^{(j)}(x-k)| |\psi^{(k-j)}(x)| \mathbf{1}_{[-1/4, 1/4]}(x-n) \\ &\leq \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} \sup_{j \leq k} \|\chi^{(j)}\|_\infty \sup_{|x-n| \leq 1/4} \frac{n!}{(n+j-k)!} |x-n|^j \\ &\leq \max_{k \leq N} \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} \binom{k}{j} \frac{1}{4^j} \frac{n!}{(n+j-k)!} \sup_{j \leq k} \|\chi^{(j)}\|_\infty \\ &\leq \frac{n!}{(n-N)!} \max_{k \leq N} \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} \binom{k}{j} \frac{1}{4^j} \sup_{j \leq k} \|\chi^{(j)}\|_\infty. \end{aligned}$$

Ainsi, $\sup_{k \leq N} \|\varphi_n^{(k)}\|_\infty \leq C_N \frac{n!}{(n-N)!}$ où C_N est une constante indépendante de N . Mais alors, si T était d'ordre fini N , il existerait $C > 0$ tel que pour tout n

$$n! = |\langle T, \varphi_n \rangle| \leq C \sup_{k \leq N} \|\varphi_n^{(k)}\|_\infty \leq C C_N \frac{n!}{(n-N)!}$$

et on aboutit à une contradiction en faisant $n \rightarrow +\infty$.

Remarque 3.18. Considérons la distribution T associée à la fonction f donnée par $f(x) = e^{ie^x}$ i.e.

$$\langle T, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}} \varphi(x) e^{ie^x} dx.$$

Remarquons que cette fonction est bornée donc $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$. De plus, f est dérivable, donc sa dérivée au sens des distributions coïncide avec sa dérivée usuelle, $f'(x) = ie^x e^{ie^x}$.

Remarquons que f ne décroît pas à l'infini, pourtant $f' \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ puisque c'est la dérivée d'une distribution de $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$.

Il se trouve qu'on a le résultat suivant: *toute distribution tempérée est combinaison linéaire (fini) de distributions de la forme $\partial^\alpha((1+|x|^2)^n f)$ où f est une fonction continue, $n \in \mathbb{N}$, $\alpha \in \mathbb{N}^d$.*

Dans la pratique, il est facile de voir que $\partial^\alpha((1+|x|^2)^n f)$ est une distribution tempérée, mais la réciproque est délicate (et en général impossible à vérifier dans la pratique).

3.3. Application aux équations de transport. L'équation de transport est le prototype des équations aux dérivées partielles linéaires d'ordre 1:

$$(3.4) \quad \partial_t u(t, x) + \langle v, \nabla_x u(x, t) \rangle = 0 \quad , \quad (t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$$

dont l'inconnue est une fonction u et $v = (v_1, \dots, v_d) \in \mathbb{R}^d$ est un vecteur fixé. Le gradient $\nabla_x u(x, t)$ est pris par rapport aux variables d'espace $\nabla_x u = (\partial_{x_1} u, \dots, \partial_{x_d} u)$ donc

$$\langle v, \nabla_x u(x, t) \rangle = \sum_{j=1}^d v_j \frac{\partial}{\partial x_j} u(x, t).$$

On s'intéresse ici plus particulièrement au problème de Cauchy en ajoutant une condition initiale

$$(3.5) \quad u(x, 0) = u_0(x).$$

Ces équations apparaissent dans de nombreux domaines de la physique (optique, physique des plasma, cinétique des gaz,...) où l'inconnue est une densité (de particules, d'énergie,...) et le vecteur v un vecteur de vitesse.

Introduisons maintenant une famille de courbes définie pour $x_0 \in \mathbb{R}^d$ par

$$\gamma(0) = x_0 \quad , \quad \frac{d\gamma}{dt}(t) = v$$

i.e. $\gamma(t) = x_0 + tv$. Notons $\gamma_j(t)$, $j = 1, \dots, d$ les coordonnées de $\gamma(t)$. Soit alors u une solution de (3.4)-(3.5) et posons $f(t) = u(t, \gamma(t))$. Alors $f(0) = u((0, \gamma(0))) = u_0(x_0)$ et

$$\begin{aligned} \frac{df}{dt}(t) &= \frac{\partial u}{\partial t}(t, \gamma(t)) + \sum_{j=1}^d \frac{\partial u}{\partial x_j}(t, \gamma(t)) \gamma_j'(t) \\ &= \frac{\partial u}{\partial t}(t, \gamma(t)) + \sum_{j=1}^d v_j \frac{\partial u}{\partial x_j}(t, \gamma(t)) \\ &= \frac{\partial u}{\partial t}(t, \gamma(t)) + \langle v, \nabla_x u(t, \gamma(t)) \rangle = 0. \end{aligned}$$

Mais alors $f(t) = f(0) = u_0(x_0)$. En d'autres termes $u(t, x_0 + tv) = u_0(x_0)$ ou encore, en changeant de variable $x = x_0 + tv$, $x_0 = x - tv$ on obtient que $u(t, x) = u_0(x - tv)$.

Définition 3.19. *La courbe $\{(t, \gamma(t)), t \in \mathbb{R}\}$ est appelée courbe caractéristique de l'équation (3.4).*

Les solutions de (3.4) sont constantes le long de ces courbes.

Nous venons donc d'obtenir certaines solutions de l'équation (3.4)-(3.5). Ces solutions sont des "transports" de la données initiale dans le sens où le graphe de la solution à

l'instant t est le translaté par le vecteur tv (transport) du graphe de la solution à l'instant initial $t = 0$. Il se trouve que toutes les solutions sont de cette forme lorsque $u_0 \in \mathcal{C}^1$:

Théorème 3.20. *Soit $u_0 \in \mathcal{C}^1$. Le problème*

$$\{(3.4) \quad \partial_t u(t, x) + \langle v, \nabla_x u(t, x) \rangle = 0 \quad (t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \quad (3.5) \quad u(0, x) = u_0(x) \quad x \in \mathbb{R}^d$$

a pour unique solution $u \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d)$ la fonction $u(x, t) = u_0(x - tv)$.

Démonstration. Nous avons déjà vu que si u est de classe \mathcal{C}^1 et solution de (3.4)-(3.5), $y \in \mathbb{R}^d$ et $f(t) = u(t, y + tv)$ alors $f'(t) = 0$ donc $f(t) = f(0) = u(0, y) = u_0(y)$ donc, en posant $x = y + tv$ on a nécessairement $u(t, x) = u_0(x - tv)$. Par ailleurs, ceci est bien une fonction de classe \mathcal{C}^1 .

Il reste à voir que $u(t, x) = u_0(x - tv)$ est bien solution de (3.4)-(3.5). Très clairement $u(0, x) = u_0(x)$ donc (3.5) est vérifié. Par ailleurs $\nabla_x u(t, x) = \nabla u_0(x - tv)$ alors que

$$\partial_t u(t, x) = - \sum_{j=1}^d \frac{\partial u_0}{\partial x_j}(x - tv) = - \langle \nabla u_0(x - tv), v \rangle$$

donc

$$\partial_t u(t, x) + \langle v, \nabla_x u(t, x) \rangle = \langle \nabla u_0(x - tv), v \rangle - \langle \nabla u_0(x - tv), v \rangle = 0$$

et (3.4) est également vérifié. \square

Remarquons que si u_0 n'est pas \mathcal{C}^1 , $u_0(x - tv)$ est toujours bien défini et représente toujours une "onde transportée dans la direction v ". Par exemple, si $d = 1$ et $u_0 = H$ la fonction de Heaviside, cela représente une onde de choc qui se déplace vers la droite à vitesse v .

Nous allons donc définir des "solutions faibles" de l'équation de transport en nous inspirant de ce qu'on a fait pour les distributions. Soit donc $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d)$. Si $u \in \mathcal{C}^1$ alors

$$\partial_t u + \langle v, \nabla u \rangle = 0$$

si et seulement si, pour tout $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d)$.

$$\int_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d} \left(\frac{\partial u}{\partial t}(t, x) + \sum_{j=1}^d v_j \frac{\partial u}{\partial x_j}(t, x) \right) \varphi(t, x) dx dt = 0.$$

Mais, en utilisant Fubini (on intègre une fonction continue sur un compact) et une intégration par parties, on obtient

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d} \frac{\partial u}{\partial t}(t, x) \varphi(t, x) dx dt &= \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} \frac{\partial u}{\partial t}(t, x) \varphi(t, x) dt \right) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} \left([u(t, x) \varphi(t, x)]_{t=-\infty}^{t=+\infty} - \int_{\mathbb{R}} u(t, x) \frac{\partial \varphi}{\partial t}(t, x) dt \right) dx \\ &= - \int_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d} u(t, x) \frac{\partial \varphi}{\partial t}(t, x) dx dt \end{aligned}$$

avec un second appel à Fubini. On fait de même pour chaque variable x_j , $j = 1, \dots, d$ et on voit que

$$\int_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d} u(t, x) \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t}(t, x) + \sum_{j=1}^d v_j \frac{\partial \varphi}{\partial x_j}(t, x) \right) dx dt = 0.$$

Remarquons que cette dernière expression ne requière plus que u soit \mathcal{C}^1 pour être bien définie. Cela nous conduit à la définition suivante:

Définition 3.21. Soit $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d)$ et $v \in \mathbb{R}^d$. On dit que u est une solution faible ou solution dans \mathcal{D}' de l'équation de transport $\partial_t u + \langle v, \nabla u \rangle = 0$ si pour tout $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d)$,

$$\langle u, \partial_t \varphi + \langle v, \nabla \varphi \rangle \rangle = 0$$

pour tout $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d)$.

Nous avons déjà vu qu'un solution $u \in \mathcal{C}^1$ (appelée solution forte) était une solution faible.

Plus généralement, si $u_0 \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$ et $u(t, x) = u_0(x - tv)$ alors $u \in L^1_{loc}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d)$ puisque si $|t| < R$ et $x \in B(0, R)$ alors $y = x - tv \in B(0, R(1 + |v|))$ donc

$$\int_{[-R, R] \times B(0, R)} |u_0(x - tv)| dx dt \leq \int_{[-R, R]} \int_{B(0, R(1 + |v|))} |u_0(y)| dy dt \leq 2R \int_{B(0, R(1 + |v|))} |u_0(y)| dy < +\infty.$$

De plus si $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d)$ alors

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d} u(t, x) \varphi(t, x) dt dx &= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}^d} u_0(x - tv) \varphi(t, x) dx dt = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}^d} u_0(y) \varphi(t, y + tv) dy dt \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} u_0(y) \int_{\mathbb{R}} \varphi(t, y + tv) dt dy. \end{aligned}$$

Notons ensuite que si φ est à support dans $[-R, R] \times B(0, R)$ alors $T[\varphi](y) := \int_{\mathbb{R}} \varphi(t, y + tv) dt = \int_{-R}^R \varphi(t, y + tv) dt$ est à support dans $B(0, R(1 + |v|))$. De plus, on voit aisément que si φ est \mathcal{C}^∞ , $T[\varphi]$ aussi

$$\frac{\partial T[\varphi]}{\partial x_j} = T \left[\frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \right].$$

En particulier

$$\sup_{\alpha \in \mathbb{N}^d, |\alpha| \leq N} \|\partial^\alpha T[\varphi]\| \leq 2R \sup_{\alpha \in \mathbb{N}^d, |\alpha| \leq N} \|\partial_x^\alpha \varphi\|.$$

Ainsi, à $u_0 \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ on peut associer une distribution $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d)$ par $\langle u, \varphi \rangle = \langle u_0, T[\varphi] \rangle$. On vérifie sans peine que u est bien une distribution.

On note aussi que

$$\langle \partial_{x_j} u, \varphi \rangle = -\langle u, \partial_{x_j} \varphi \rangle = -\langle u_0, T[\partial_{x_j} \varphi] \rangle = -\langle u_0, \partial_{x_j} T[\varphi] \rangle$$

Enfin, si on fixe $y \in \mathbb{R}^d$ et on pose $f(t) = \varphi(t, y + tv)$ alors $f \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$ avec $f'(t) = \partial_t \varphi(t, y + tv) + \langle v, \nabla_x \varphi(t, y + tv) \rangle$ donc

$$\begin{aligned} T[\partial_t \varphi] &= \int_{\mathbb{R}} \partial_t \varphi(t, y + tv) dt = \int_{\mathbb{R}} f'(t) dt - \int_{\mathbb{R}} \langle v, \nabla_x \varphi(t, y + tv) \rangle dt \\ &= [f(t)]_{-\infty}^{+\infty} - \sum_{j=1}^d v_j \int_{\mathbb{R}} \partial_{x_j} \varphi(t, y + tv) dt \\ &= - \sum_{j=1}^d v_j \partial_{x_j} T[\varphi](y). \end{aligned}$$

Mais alors

$$\begin{aligned}
\langle \partial_t u, \varphi \rangle &= -\langle u, \partial_t \varphi \rangle = -\langle u_0, T[\partial_t \varphi] \rangle \\
&= \sum_{j=1}^d v_j \langle u_0, \partial_{x_j} I[\varphi] \rangle = -\sum_{j=1}^d v_j \langle \partial_{x_j} u, \varphi \rangle \\
&= -\langle \langle v, \nabla u \rangle, \varphi \rangle
\end{aligned}$$

et on a bien $\langle \partial_t u + \langle v, \nabla u \rangle, \varphi \rangle = 0$.

Nous avons ainsi démontré:

Théorème 3.22. *Soit $u_0 \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ et $v \in \mathbb{R}^d$. Soit $T : \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d) \rightarrow \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$ défini par $T[\varphi] = \int_{\mathbb{R}} \varphi(t, y + tv) dt$. Alors T est continue et on peut définir $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d)$ par $\langle u, \varphi \rangle = \langle u_0, T[\varphi] \rangle$. Alors u est une solution dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d)$ de l'équation de transport $\partial_t u + \langle v, \nabla u \rangle = 0$ i.e.*

$$\langle \partial_t u + \langle v, \nabla u \rangle, \varphi \rangle = 0 \quad \text{pour tout } \varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^d).$$

3.4. Primitive d'une distribution. Nous allons maintenant voir que toute distribution admet une primitive et que celle-ci est unique à une constante additive près:

Théorème 3.23. *Soit $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$. Alors il existe $U \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ tel que $U' = T$. De plus, si $V \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ est tel que $V' = T$ alors $V = U + C$ où C est une constante.*

Enfin, si $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ alors $U \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$.

On dira que U est une primitive de T .

En toute rigueur, on devrait écrire $V = U + T_C$ où T_C est la distribution associée à la fonction constante C , c'est-à-dire $\langle T_C, \varphi \rangle = C \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(x) dx$.

Démonstration. Soit $\chi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$, $\chi \geq 0$, χ à support dans $[-1, 1]$ et $\int_{\mathbb{R}} \chi(t) dt = 1$. Nous allons utiliser le fait que

$$(3.6) \quad \int_{-\infty}^x \chi(t) dt = \begin{cases} 0 & \text{si } x < -1 \\ 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}.$$

Pour $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ définissons alors

$$I(\varphi)(x) = \int_{-\infty}^x \varphi(t) dt - \left(\int_{\mathbb{R}} \varphi(t) dt \right) \int_{-\infty}^x \chi(t) dt.$$

Comme $\mathcal{S}(\mathbb{R}) \subset L^1(\mathbb{R})$, $I(\varphi)$ est bien défini. De plus $I(\varphi)$ est une combinaison linéaire de primitives de fonctions \mathcal{C}^∞ , donc $I(\varphi)$ est de classe \mathcal{C}^∞ .

Étape 1. La première partie de la démonstration consiste à montrer que $\varphi \rightarrow I(\varphi)$ est une opération continue $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$ et $\mathcal{S}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R})$.

Tout d'abord, (3.6) implique

$$I(\varphi)(x) = \begin{cases} \int_{-\infty}^x \varphi(t) dt & \text{si } x < -1 \\ -\int_x^{+\infty} \varphi(t) dt & \text{si } x > 1 \end{cases}.$$

Notons que si φ est à support compact, alors $I(\varphi)$ aussi. En effet, il existe $a > 1$ tel que, si $|x| > a$ alors $\varphi(x) = 0$. Mais alors, si $x < -a < -1$, $\int_{-\infty}^x \varphi(t) dt = 0$ et $I(\varphi) = 0$.

D'autre part, si $x > a > 1$ alors $\int_{-\infty}^x \varphi(t) dt = \int_{\mathbb{R}} \varphi(t) dt$ donc

$$I(\varphi)(x) = \int_{\mathbb{R}} \varphi(t) dt - \left(\int_{\mathbb{R}} \varphi(t) dt \right) \underbrace{\int_{-\infty}^x \chi(t) dt}_{=1} = 0.$$

En particulier, si φ est à support dans $[-a, a]$, $I(\varphi)$ aussi. Remarquons que

$$|I(\varphi)(x)| \leq \int_{-\infty}^x |\varphi(t)| dt + \left(\int_{\mathbb{R}} |\varphi(t)| dt \right) \int_{-\infty}^x \chi(t) dt \leq 2 \int_{-a}^a |\varphi(t)| dt \leq 4a \|\varphi\|_{\infty}$$

et que

$$|\partial^k I(\varphi)| \leq |\partial^{k-1} \varphi(x)| + \left(\int_{\mathbb{R}} |\varphi(t)| dt \right) |\partial^{k-1} \chi(x)| \leq \|\partial^{k-1} \varphi\|_{\infty} + K(a) \|\varphi\|_{\infty}$$

où $K(a) = 2a \|\partial^{k-1} \chi\|_{\infty}$ ne dépend que de a (χ est fixé) c'est-à-dire du support de φ mais pas de φ elle-même.

Cela signifie que $\varphi \rightarrow I(\varphi)$ est continue $\mathcal{C}_c^{\infty}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{C}_c^{\infty}(\mathbb{R})$:

pour tout $a > 0$ et tout $k \in \mathbb{N}$, il existe $C(a, k)$ telle que, si $\varphi \in \mathcal{C}_c^{\infty}(\mathbb{R})$ alors

$$(3.7) \quad \|\partial^k I(\varphi)\| \leq C(a, k) \sup_{j \leq k} \|\partial^j \varphi\|.$$

Montrons maintenant que cette opération est aussi continue $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \rightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$. Si $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ et $N > 0$ alors, en notant $C_N = \|(1 + |x|)^{N+1} \varphi\|_{\infty}$, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|\varphi(x)| \leq C_N (1 + |x|)^{-N-1}$. Mais alors, pour $|x| > 1$

$$|I(\varphi)(x)| \leq \begin{cases} \int_{-\infty}^x C_N (1 + |t|)^{-N-1} dt & \text{si } x < 1 \\ \int_x^{+\infty} C_N (1 + |t|)^{-N-1} dt & \text{si } x > 1 \end{cases} \leq \frac{C_N}{N} (1 + |x|)^{-N}.$$

Donc $I(\varphi)$ a la propriété de décroissance rapide. Notons aussi que si $|x| \leq 1$, alors

$$|I(\varphi)(x)| \leq 2 \int_{\mathbb{R}} |\varphi(t)| dt \leq 2 \int_{\mathbb{R}} C_N (1 + |t|)^{-N-1} dt = \frac{4C_N}{N}.$$

Ainsi, en posant $K_N = \frac{2^{N+2}}{N}$ (la valeur exacte n'a aucune importance)

$$\begin{aligned} \|(1 + |x|)^N I(\varphi)\|_{\infty} &\leq \max\left(\sup_{|x|>1} (1 + |x|)^N |I(\varphi)(x)|, \sup_{|x|<1} (1 + |x|)^N |I(\varphi)(x)|\right) \\ &\leq K_N \|(1 + |x|)^{N+1} \varphi\|_{\infty}. \end{aligned}$$

Par ailleurs, $\partial^k I(\varphi) = \partial^{k-1} \varphi - \left(\int_{\mathbb{R}} \varphi(t) dt \right) \partial^{k-1} \chi$ donc

$$\begin{aligned} \|(1 + |x|)^N \partial^k I(\varphi)\|_{\infty} &\leq \|(1 + |x|)^N \partial^{k-1} \varphi\|_{\infty} + \int_{\mathbb{R}} |\varphi(t)| dt \|(1 + |x|)^N \partial^{k-1} \chi\|_{\infty} \\ &\leq \|(1 + |x|)^N \partial^{k-1} \varphi\|_{\infty} + \tilde{K}_N \|(1 + |x|)^2 \varphi\|_{\infty} \end{aligned}$$

avec \tilde{K}_N une constante (qui dépend de χ mais pas de φ). Ainsi:

pour tout M, N , il existe une constante $C = C(N, M)$ telle que, si $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ alors

$$(3.8) \quad \|(1 + |x|)^N \partial^M I(\varphi)\| \leq C \sup_{k \leq M} \|(1 + |x|)^{N+2} \partial^k \varphi\|_\infty.$$

Étape 2. Nous allons maintenant définir U et vérifier que $U' = T$.

La définition est assez simple:

— Si $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$, on définit U par, pour tout $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$, on pose $\langle U, \varphi \rangle = -\langle T, I(\varphi) \rangle$.

Notons d'abord que, comme $I(\varphi) \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$, cette définition a bien un sens. De plus, $\varphi \rightarrow I(\varphi)$ est clairement linéaire donc U aussi. Enfin si on fixe a , alors il existe C et N tel que, pour toute $\psi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$ à support dans $[-a, a]$, on a $|\langle T, \psi \rangle| \leq C \max k \leq N \|\partial^k \psi\|_\infty$. En prenant $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$ à support dans $[-a, a]$ et en appliquant cela à $I(\varphi)$ on en déduit que

$$|\langle U, \varphi \rangle| = |\langle T, I(\varphi) \rangle| \leq C \max k \leq N \|\partial^k I(\varphi)\|_\infty \leq \max_{k \leq N} C(a, k) \max k \leq N \|\partial^k \varphi\|_\infty.$$

avec (3.7). Donc $U \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$. Il nous reste à voir que $U' = T$, mais

$$\langle U', \varphi \rangle = -\langle U, \varphi' \rangle = \langle T, I(\varphi') \rangle.$$

Il reste à remarquer que

$$\begin{aligned} I(\varphi') &= \int_{-\infty}^x \varphi'(t) dt - \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi'(t) dt \right) \int_{-\infty}^x \chi(t) dt \\ &= \varphi(x) - \left(\lim_{t \rightarrow +\infty} \varphi(t) - \lim_{t \rightarrow -\infty} \varphi(t) \right) \int_{-\infty}^x \chi(t) dt = \varphi(x) \end{aligned}$$

pour en déduire que $\langle U', \varphi \rangle = \langle T, \varphi \rangle$ pour tout $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$ i.e. $U' = T$.

— Si $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$, on définit U de la même façon, mais pour tout $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ (et pas uniquement \mathcal{C}_c^∞): $\langle U, \varphi \rangle = -\langle T, I(\varphi) \rangle$.

La linéarité est claire et le fait que $U \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ se déduit de la même façon que précédemment en remplaçant (3.7) par (3.8). Enfin, on a déjà $\langle U', \varphi \rangle = \langle T, \varphi \rangle$ pour tout $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$. Comme $U', T \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, on en déduit que la même chose est vraie pour tout $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$.

Étape 3. Unicité.

Si $U' = V' = T$ alors $(U - V)' = U' - V' = 0$. Il s'agit donc de montrer que si $W' = 0$ alors $W = C$. Mais dans ce cas, pour tout $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$,

$$0 = \langle W', I(\varphi) \rangle = -\langle W, I(\varphi)' \rangle = -\langle W, \varphi \rangle + \int_{\mathbb{R}} \varphi(t) dt \langle W, \chi \rangle.$$

Ainsi, en posant $C = \langle W, \chi \rangle$, on trouve

$$\langle W, \varphi \rangle = C \int_{\mathbb{R}} \varphi(t) dt = \langle T_C, \varphi \rangle.$$

□

Exemple 3.24. Comme nous avons vu que la dérivée de la fonction de Heaviside est $H' = \delta_0$ les primitives de δ_0 sont les fonctions $H + C$ avec C une constante.

Exemple 3.25. $\ln|x| \in L^1_{loc}$ donc définit une distribution: \ln est continue, il n'y a donc de problème pour l'intégration qu'en 0 et comme $|x|^{1/2} \ln|x| \rightarrow 0$, $\int_{-R}^R \ln|x| dx$ converge absolument. Calculons sa dérivée, si $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$, en

$$\begin{aligned} \langle (\ln|x|)', \varphi \rangle &= -\langle \ln|x|, \varphi' \rangle = \int_{\mathbb{R}} \varphi'(x) \ln|x| dx \\ &= -\int_0^{+\infty} (\varphi'(x) + \varphi'(-x)) \ln|x| dx \\ &= [-(\varphi(x) - \varphi(-x)) \ln|x|]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} \frac{\varphi(x) - \varphi(-x)}{x} dx \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{\varphi(x) - \varphi(-x)}{x} dx. \end{aligned}$$

Cette intégration par parties est parfaitement justifiée puisque le terme tout intégré est convergent (en 0, ce ne sont pas des intégrales généralisées en $+\infty$ puisqu'il existe R tel que $\phi(x) = 0$ si $|x| > R$, on n'intègre donc que jusqu'à R). En utilisant (1.3) on en déduit:

Une primitive au sens des distributions de $\ln|x|$ est vp $\frac{1}{x}$.

3.5. Transformée de Fourier. Rappelons que nous avons vu (au début du chapitre sur l'inversion de Fourier) que si $f, g \in L^1(\mathbb{R}^d)$ alors

$$\int_{\mathbb{R}^d} f(x) \hat{g}(x) dx = \int_{\mathbb{R}^d} \hat{f}(x) g(x) dx.$$

En particulier, cette formule est valable pour $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, ce qui permet de définir la transformée de Fourier de la distribution associée à f :

Définition 3.26. Soit $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ alors on définit sa transformée de Fourier par $\langle \hat{T}, \varphi \rangle = \langle T, \hat{\varphi} \rangle$.

Observons que

– On n'a jamais $\hat{\varphi} \in \mathcal{C}_c^\infty$ lorsque $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty$ (sauf si $\varphi = 0$, en fait $\hat{\varphi}$ est holomorphe si φ est à support compact, donc $\hat{\varphi}$ n'est pas à support compact). Cette définition ne peut donc pas avoir de sens pour toutes les distributions.

– cette définition a bien un sens quand $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ puisque la transformée de Fourier envoie $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ dans lui-même.

– la transformée de Fourier ainsi définie prolonge bien la définition de la transformée de Fourier de L^1 .

– \hat{T} est bien dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$. Ceci provient des propriétés de la transformée de Fourier: soit $\alpha \in N^d$ et $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ alors $|x^\alpha \partial^\beta \hat{\varphi}| = (2\pi)^{-|\alpha|-|\beta|} |\widehat{\partial^\alpha [x^\beta] \varphi}|$ donc

$$\begin{aligned} \|x^\alpha \partial^\beta \hat{\varphi}\|_\infty &\leq (2\pi)^{-|\alpha|-|\beta|} \|\partial^\alpha [x^\beta] \varphi\|_1 \\ &\leq (2\pi)^{-|\alpha|-|\beta|} \int_{\mathbb{R}^d} \frac{dx}{(1+|x|)^{d+1}} \|(1+|x|)^{d+1} \partial^\alpha [x^\beta] \varphi\|_\infty \\ &\leq C_{\alpha,\beta} \sup_{\gamma \leq \alpha} (1+|x|)^{d+|\beta|} \partial^\gamma \varphi_\infty \end{aligned}$$

où $C_{\alpha,\beta}$ est une constante (on utilise la formule de Leibnitz). Ainsi, si $T \in \mathcal{S}'$

$$\begin{aligned} |\langle \widehat{T}, \varphi \rangle| &= |\langle T, \widehat{\varphi} \rangle| \leq C \sup_{|\alpha|, |\beta| \leq N} \|x^\alpha \partial^\beta \widehat{\varphi}\|_\infty \\ &\leq C' \sup_{|\alpha|, |\beta| \leq N+d+1} \|x^\alpha \partial^\beta \widehat{\varphi}\|_\infty. \end{aligned}$$

donc $\widehat{T} \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$. Ceci montre de plus que $T \rightarrow \widehat{T}$ est (linéaire) continue $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d) \rightarrow \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$.

– En particulier, si $T \in L^2(\mathbb{R}^d)$ alors sa transformée de Fourier au sens des distribution coincide avec celle déjà définie au chapitre précédent: notons provisoirement $f \rightarrow \mathcal{F}[f]$ la transformée de Fourier au sens des distributions et $f \rightarrow \widehat{f}$ la transformée de Fourier usuelle.

Soit $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$ et $f_n \in L^1 \cap L^2$ telle que $f_n \rightarrow f$ dans L^2 . Pour f_n , on a déjà vu que $\mathcal{F}[f_n] = \widehat{f_n}$. Par ailleurs $f_n \rightarrow f$ dans L^2 donc $\widehat{f_n} \rightarrow \widehat{f}$ dans L^2 . Enfin, la convergence dans L^2 implique la convergence faible $\langle f_n, \varphi \rangle \rightarrow \langle f, \varphi \rangle$ pour tout φ dans L^2 donc aussi la convergence au sens des distributions $\langle f_n, \varphi \rangle \rightarrow \langle f, \varphi \rangle$ pour tout φ dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ et idem pour $\widehat{f_n} \rightarrow \widehat{f}$ dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$. Enfin, par continuité de \mathcal{F} , on a $\mathcal{F}[f_n] \rightarrow \mathcal{F}[f]$ dans \mathcal{S}' . Ainsi, en passant à la limite dans $\mathcal{F}[f_n] = \widehat{f_n}$ on obtient $\mathcal{F}[f] = \widehat{f}$ dans \mathcal{S}' .

– L'application $T \rightarrow \widehat{T}$ est une bijection de $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$.

En effet, si $T_0 \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$, on définit $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ par $\langle T, \varphi \rangle = \langle T_0, \mathcal{F}^{-1}[\varphi] \rangle$ où \mathcal{F}^{-1} est la transformée de Fourier inverse. Cette transformée étant $\mathcal{F}^{-1}[\varphi](\xi) = \mathcal{F}[\varphi](-\xi)$, elle a les mêmes propriétés sur $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ que \mathcal{F} donc T est bien une distribution tempérée d'après le raisonnement précédent. De plus

$$\langle \widehat{T}, \varphi \rangle = \langle T, \mathcal{F}[\varphi] \rangle = \langle T_0, \mathcal{F}^{-1}[\mathcal{F}[\varphi]] \rangle = \langle T_0, \varphi \rangle$$

donc $\widehat{T} = T_0$. Cela montre la surjectivité. Supposons maintenant que T est tel que $\langle \widehat{T}, \varphi \rangle = 0$ pour tout $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, i.e. que $\langle T, \widehat{\varphi} \rangle = 0$ pour tout $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$. Soit alors $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$. Comme la transformée de Fourier est une bijection $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \rightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, il existe φ tel que $\psi = \mathcal{F}[\varphi]$. Mais alors $\langle T, \psi \rangle = \langle T, \mathcal{F}[\varphi] \rangle = \langle T, \widehat{\varphi} \rangle = 0$. Ainsi, pour tout $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, $\langle T, \psi \rangle = 0$ donc $T = 0$. Cela montre l'injectivité.

En résumé:

Théorème 3.27. *L'application $T \rightarrow \widehat{T}$ est une bijection continue $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d) \rightarrow \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$.*

Elle vérifie les relations suivantes:

$$i) \quad \mathcal{F}[\tau_a T] = e^{-2i\pi\langle a, x \rangle} \mathcal{F}[T], \quad ii) \quad \mathcal{F}[e^{2i\pi\langle a, x \rangle} T] = \tau_a \mathcal{F}[T], \quad iii) \quad \mathcal{F}[\delta_\lambda T] = \delta_{1/\lambda} T,$$

$$iv) \quad \partial_j \widehat{T} = -2i\pi \xi_j T, \quad v) \quad 2i\pi \xi_j \widehat{T} = \mathcal{F}[\partial_j T].$$

Démonstration. Il ne nous reste plus qu'à montrer que les relations sont vérifiées. Les 3 premières sont laissées en exemple. Pour celles concernant la dérivation:

$$\begin{aligned} \langle \partial_j \widehat{T}, \varphi \rangle &= -\langle \widehat{T}, \partial_j \varphi \rangle = -\langle T, \widehat{\partial_j \varphi} \rangle = -\langle T, 2i\pi \xi_j \widehat{\varphi} \rangle \\ &= \langle -2i\pi \xi_j T, \widehat{\varphi} \rangle = \langle \mathcal{F}[-2i\pi \xi_j T], \varphi \rangle \end{aligned}$$

c'est-à-dire $\partial_j \widehat{T} = -2i\pi\xi_j T$ alors que

$$\begin{aligned} \langle 2i\pi\xi_j \widehat{T}, \varphi \rangle &= \langle \widehat{T}, 2i\pi\xi_j \varphi \rangle = \langle T, \widehat{2i\pi\xi_j \varphi} \rangle = \langle T, -\partial_j \widehat{\varphi} \rangle \\ &= \langle \partial_j T, \widehat{\varphi} \rangle = \langle \mathcal{F}[\partial_j T], \varphi \rangle \end{aligned}$$

c'est-à-dire $2i\pi\xi_j \widehat{T} = \mathcal{F}[\partial_j T]$. \square

Exemple 3.28. On voit facilement que $\mathcal{F}[\delta_0] = 1$ puisque

$$\langle \mathcal{F}[\delta_0], \varphi \rangle = \langle \delta_0, \mathcal{F}[\varphi] \rangle = \mathcal{F}[\varphi](0) = \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(x) dx = \langle T_1, \varphi \rangle$$

où T_1 est la distribution associée à la fonction constante 1.

Exemple 3.29. Soit $\alpha \in \mathbb{N}^d$, déterminons $\mathcal{F}[\partial^\alpha \delta_{x_0}]$.

D'après ce qui précède, $\mathcal{F}[\partial^\alpha \delta_{x_0}] = (-2i\pi\xi)^\alpha \mathcal{F}[\delta_{x_0}]$. Mais

$$\langle \mathcal{F}[\delta_{x_0}], \varphi \rangle = \langle \delta_{x_0}, \widehat{\varphi} \rangle = \widehat{\varphi}(x_0) = \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(x) e^{-2i\pi\langle x_0, x \rangle} dx = \langle e^{-2i\pi\langle x_0, x \rangle}, \varphi \rangle.$$

Attention, cette dernière expression n'est pas le produit scalaire de $L^2(\mathbb{R}^d)$ (mais y ressemble fort), c'est la distribution tempérée associée à la fonction $x \rightarrow e^{-2i\pi\langle x_0, x \rangle}$ (est bornée) qu'on applique à la fonction φ .

On en déduit que $\mathcal{F}[\partial^\alpha \delta_{x_0}] = (-2i\pi\xi)^\alpha e^{-2i\pi\langle x_0, x \rangle}$.

En particulier, si $x_0 = 0$, on voit que tout polynôme P est la transformée de Fourier d'une combinaison linéaire de dérivées de masse de Dirac en 0:

$$\begin{aligned} P(x) &= a_0 + a_1 x + \dots + a_k x^k = a_0 - \frac{a_1}{2i\pi} (-2i\pi x) + \dots + \frac{(-1)^k a_k}{(2i\pi)^k} (-2i\pi x)^k \\ &= \mathcal{F} \left[a_0 \delta_0 - \frac{a_1}{2i\pi} \partial \delta_0 + \frac{(-1)^k a_k}{(2i\pi)^k} \partial^k \delta_0 \right]. \end{aligned}$$

Exemple 3.30. On a vu que $\text{vp} \frac{1}{x} \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$, calculons sa transformée de Fourier: pour $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ (cela suffit par continuité de la transformée de Fourier et densité de \mathcal{C}_c^∞ dans \mathcal{S}')

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{F}[\text{vp} \frac{1}{x}], \varphi \rangle &= \langle \text{vp} \frac{1}{x}, \mathcal{F}[\varphi] \rangle = \int_0^{+\infty} \frac{\widehat{\varphi}(\xi) - \widehat{\varphi}(-\xi)}{\xi} d\xi \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{1}{\xi} \int_{\mathbb{R}} \varphi(t) (e^{-2i\pi t \xi} - e^{2i\pi t \xi}) dt d\xi \\ &= -2i \int_0^{+\infty} \frac{1}{\xi} \int_{\mathbb{R}} \varphi(t) \sin(2\pi t \xi) dt d\xi \\ &= -2i \lim_{R, S \rightarrow +\infty} \int_{1/R}^R \frac{1}{\xi} \int_{|t| > 1/S} \varphi(t) \sin(2\pi t \xi) dt d\xi. \end{aligned}$$

Notons que la convergence de cette intégrale a été montrée lorsque nous avons défini la valeur principale. On utilise alors Fubini (on intègre une fonction continue sur un compact

de \mathbb{R}^2)

$$\begin{aligned} \int_{1/R}^R \frac{1}{\xi} \int_{|t|>1/S} \varphi(t) \sin(2\pi t\xi) dt d\xi &= \int_{|t|>1/R} \varphi(t) \int_{1/R}^R \frac{\sin(2i\pi t\xi)}{\xi} d\xi dt \\ &= \int_{-\infty}^{-1/S} \varphi(t) \int_{1/R}^R \sin(2\pi t\xi) \frac{d\xi}{\xi} dt + \int_{1/R}^{+\infty} \varphi(t) \int_{1/R}^R \sin(2\pi t\xi) \frac{d\xi}{\xi} dt \\ &= - \int_{-\infty}^{-1/S} \varphi(t) \int_{|t|/R}^{|t|R} \sin(2\pi\eta) \frac{d\eta}{\eta} dt + \int_{1/S}^{+\infty} \varphi(t) \int_{|t|/R}^{|t|R} \sin(2\pi\eta) \frac{d\eta}{\eta} dt \end{aligned}$$

avec le changement de variable $\eta = \xi|t|$ (i.e. $\eta = -\xi t$ dans la première intégrale et $\eta = \xi t$ dans la seconde). Ainsi

$$\int_{1/R}^R \frac{1}{\xi} \int_{|t|>1/S} \varphi(t) \sin(2i\pi t\xi) dt d\xi = \int_{|t|>1/S} \varphi(t) \operatorname{sgn}(t) \int_{|t|/R}^{|t|R} \frac{\sin(2\pi\eta)}{\eta} d\eta dt.$$

On peut maintenant faire tendre $R \rightarrow +\infty$ et se rappeler que

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(2\pi\eta)}{\eta} d\eta = \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}.$$

En particulier, cette intégrale étant convergente,

$$\int_{|t|/R}^{|t|R} \frac{\sin(2\pi\eta)}{\eta} d\eta dt$$

est bornée indépendamment de t et R . On peut donc appliquer le théorème de convergence dominée et en déduire que

$$\begin{aligned} \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{|t|>1/S} \varphi(t) \operatorname{sgn}(t) \int_{|t|/R}^{|t|R} \frac{\sin(2\pi\eta)}{\eta} d\eta dt &= \int_{|t|>1/S} \varphi(t) \operatorname{sgn}(t) \int_0^{+\infty} \frac{\sin(2\pi\eta)}{\eta} d\eta dt \\ &= \frac{\pi}{2} \int_{|t|>1/S} \varphi(t) \operatorname{sgn}(t) dt. \end{aligned}$$

Enfin, en faisant tendre $S \rightarrow +\infty$, on en déduit que

$$\langle \mathcal{F}[\operatorname{vp} \frac{1}{x}], \varphi \rangle = -i\pi \int_{\mathbb{R}} \varphi(t) \operatorname{sgn}(t) dt.$$

En d'autres termes

Lemme 3.31. *La transformée de Fourier de la valeur principale est $\mathcal{F}[\operatorname{vp} \frac{1}{x}] = -i\pi \operatorname{sgn}(x)$.*

Lemme 3.32. *Soient $f, g \in L^2(\mathbb{R}^d)$ alors $\mathcal{F}[f * g] = \mathcal{F}[f]\mathcal{F}[g]$.*

Il s'agit de comprendre correctement cet énoncé: si $f, g \in L^2$ alors $f * g \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R}^d) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$. Ainsi $\mathcal{F}[f * g]$ est une transformée de Fourier au sens des distributions. Par ailleurs, $\mathcal{F}[f], \mathcal{F}[g] \in L^2(\mathbb{R}^d)$ donc $\mathcal{F}[f]\mathcal{F}[g] \in L^1(\mathbb{R}^d) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$. C'est donc une égalité entre distributions tempérées. Le membre de droite étant dans L^1 , celui de gauche aussi.

Démonstration. On a bien évidemment $\mathcal{F}[f * g] = \mathcal{F}[f]\mathcal{F}[g]$ si $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$. Ainsi, si $f, g \in L^2(\mathbb{R}^d)$, on prend $f_n, g_n \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ telles que $f_n \rightarrow f, g_n \rightarrow g$ dans L^2 . On aura $f_n * g_n \rightarrow f * g$ dans \mathcal{C}_0 puisque la convolution est continue $L^2 \times L^2 \rightarrow \mathcal{C}_0$. La convergence dans \mathcal{C}_0 est plus forte que celle dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ donc $f_n * g_n \rightarrow f * g$ dans \mathcal{S}' et par continuité

de la transformée de Fourier sur \mathcal{S}' , $\mathcal{F}[f_n * g_n] \rightarrow \mathcal{F}[f * g]$ dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$. Par ailleurs, on aura $\mathcal{F}[f_n] \rightarrow \mathcal{F}[f]$, $\mathcal{F}[g_n] \rightarrow \mathcal{F}[g]$ dans $L^2(\mathbb{R}^d)$ donc $\mathcal{F}[f_n]\mathcal{F}[g_n] \rightarrow \mathcal{F}[f]\mathcal{F}[g]$ dans $L^1(\mathbb{R}^d)$ donc aussi dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$.

En passant à la limite dans $\mathcal{F}[f_n * g_n] = \mathcal{F}[f_n]\mathcal{F}[g_n]$, on trouve bien $\mathcal{F}[f * g] = \mathcal{F}[f]\mathcal{F}[g]$. \square

Exemple 3.33. Pour $a \in \mathbb{C}$ avec $\Re(a) > 0$, posons $c_a^+(t) = \frac{1}{a + 2i\pi t}$ et $c_a^-(t) = \frac{1}{a - 2i\pi t}$. Alors, si $a, b \in \mathbb{C}$, avec $\Re(a), \Re(b) > 0$. Alors $c_a^+ * c_b^+ = c_{a+b}^+$, $c_a^- * c_b^- = c_{a+b}^-$ et $c_a^+ * c_b^- = c_a^- * c_b^+ = 0$.

En effet, on a

$$\int_{\mathbb{R}} \mathbf{1}_{[0, +\infty)}(x) e^{-ax} e^{2i\pi tx} dx = \left[\frac{e^{(-a+2i\pi t)x}}{2i\pi t - a} \right]_0^{+\infty} = \frac{1}{a - 2i\pi t}$$

et

$$\int_{\mathbb{R}} \mathbf{1}_{(-\infty, 0]}(x) e^{ax} e^{2i\pi tx} dx = \left[\frac{e^{(a+2i\pi t)x}}{2i\pi t + a} \right]_{-\infty}^0 = \frac{1}{a + 2i\pi t}.$$

donc avec la formule d'inversion de Fourier (dans L^2) $\mathcal{F}[c_a^+](x) = \mathbf{1}_{(-\infty, 0]}(x)e^{ax}$ et $\mathcal{F}[c_a^-](x) = \mathbf{1}_{[0, +\infty)}(x)e^{-ax}$.

Mais alors

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[c_a^+ * c_b^+](x) &= \mathcal{F}[c_a^+](x)\mathcal{F}[c_b^+](x) = \mathbf{1}_{(-\infty, 0]}(x)e^{ax}\mathbf{1}_{(-\infty, 0]}(x)e^{bx} \\ &= \mathbf{1}_{(-\infty, 0]}(x)e^{(a+b)x} = \mathcal{F}[c_{a+b}^+]. \end{aligned}$$

Ainsi, par unicité de Fourier, $c_a^+ * c_b^+ = c_{a+b}^+$.

D'autre part

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[c_a^+ * c_b^-](x) &= \mathcal{F}[c_a^+](x)\mathcal{F}[c_b^-](x) = \mathbf{1}_{(-\infty, 0]}(x)e^{ax}\mathbf{1}_{[0, +\infty)}(x)e^{-bx} \\ &= 0 \text{ p.p.} \end{aligned}$$

Par injectivité de Fourier, $c_a^+ * c_b^- = 0$. Les autres cas sont similaires.

4. SUPPORT

4.1. Définition du support. La notion de support est plus subtile qu'il n'y paraît. Lorsque f est régulière, disons simplement continue, on définit

$$\text{supp } f = \overline{\{x \in \mathbb{R}^d : f(x) \neq 0\}}.$$

On prend l'adhérence parce qu'on veut que le support soit fermé, ainsi, si le support est de plus borné, il est compact.

On voit immédiatement que cette définition pose problème lorsque f n'est plus régulière. En particulier, elle n'a pas de sens si $f \in L^p$ car alors $0 = 0 + \mathbf{1}_{\mathbb{Q}}$ presque partout et $\overline{\{x \in \mathbb{R} : \mathbf{1}_{\mathbb{Q}}(x) \neq 0\}} = \overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$. Le support dépendrait alors du représentant, ce qui n'est pas souhaitable.

Il est toutefois aisé de définir f à support compact s'il existe $R > 0$ tel que $f(x) = 0$ pour presque tout x avec $|x| \geq R$. Cette notion ne dépend pas du représentant et évite soigneusement de définir le support. Notons que, dans ce cas, pour toute fonction φ de

classe \mathcal{C}^∞ dont le support (qui est bien défini) est inclus dans $\{x \in \mathbb{R}^d : |x| > R\}$ on a $\int_{\mathbb{R}^d} f(x)\varphi(x) dx = 0$.

Réciproquement, supposons que pour toute fonction φ de classe \mathcal{C}^∞ dont le support est inclus dans $\{x \in \mathbb{R}^d : |x| > R\}$ on a $\int_{\mathbb{R}^d} f(x)\varphi(x) dx = 0$. Soit alors x_0 avec $|x_0| > R$ et $0 < 2r < R - |x_0|$. Soit $\varphi_n \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^d)$ telle que $\text{supp } \varphi_n \subset B(x_0, 2r)$, $|\varphi_n| \leq 1$ et $\varphi_n \rightarrow \mathbf{1}_{B(x_0, r)} \text{sgn } f$.[§] On a alors $|f(x)\varphi_n(x)| \leq |f(x)|\mathbf{1}_{B(x_0, 2r)} \in L^2$ et $f(x)\varphi_n(x) \rightarrow |f(x)|\mathbf{1}_{B(x_0, r)}$ donc

$$0 = \int_{\mathbb{R}^d} f(x)\varphi_n(x) dx \rightarrow \int_{\mathbb{R}^d} |f(x)|\mathbf{1}_{B(x_0, r)} dx.$$

Ainsi $f = 0$ presque partout sur $B(x_0, r)$. Le choix de x_0 et de r nous dit alors que $f = 0$ presque partout sur $\mathbb{R}^d \setminus B(0, R)$.

Cela nous conduit donc à définir le support de $f \in L^p$ par son complémentaire

$$\mathbb{R}^d \setminus \text{supp } f = \bigcup \left\{ B(x, r) : \forall \varphi \in \mathcal{C}_c^\infty \text{ avec } \text{supp } \varphi \subset B(x, r), \int_{\mathbb{R}^d} f(x)\varphi(x) dx = 0 \right\}.$$

On remarque plusieurs choses:

- $\mathbb{R}^d \setminus \text{supp } f$ est une réunion d'ouvert et est donc ouvert donc $\text{supp } f$ est fermé;
- cette définition ne fait intervenir f que dans une intégrale et ne dépend donc pas du représentant de f (on peut modifier f sur un ensemble négligeable) et a donc bien un sens pour $f \in L^p$ et même $f \in L^1_{loc}$

- cette définition fait intervenir la distribution associée T_f puisque $\int_{\mathbb{R}^d} f(x)\varphi(x) dx = \langle T_f, \varphi \rangle$.

Il est donc logique de définir:

Définition 4.1. Soit $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$, alors

$$\mathbb{R}^d \setminus \text{supp } T = \bigcup \{ B(x, r) : \forall \varphi \in \mathcal{C}_c^\infty \text{ avec } \text{supp } \varphi \subset B(x, r), \langle T, \varphi \rangle = 0 \}.$$

Ainsi, un point $x \in \mathbb{R}^d$ n'est pas dans le support si (et seulement si) il existe $r > 0$ tel que pour tout $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty$, avec $\text{supp } \varphi \subset B(x, r)$, $\langle T, \varphi \rangle = 0$.

Exemple 4.2. Pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^d$, $\text{supp } \partial^\alpha \delta_{x_0} = \{x_0\}$.

En effet si $x \neq x_0$, et $r = |x - x_0|$ alors, si $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty$ avec $\text{supp } \varphi \subset B(x, r/2)$, pour tout $y \in B(x_0, r/2)$ on a $\varphi(y) = 0$ donc $\partial^\alpha \varphi(y) = 0$. En particulier $\langle \partial^\alpha \delta_{x_0}, \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \partial^\alpha \varphi(x_0) = 0$. On vient donc de voir que $\text{supp } \partial^\alpha \delta_{x_0} \subset \{x_0\}$.

Enfin, soit $\chi \in \mathcal{C}_c^\infty$ une fonction telle que $\chi(x) = 1$ au voisinage de x_0 et $\varphi = (x - x_0)^\alpha \chi(x)$. On a, pour tout $\beta \in \mathbb{N}^d$ avec $\beta \leq \alpha$, $\partial^{\alpha-\beta} (x - x_0)^\alpha = \frac{\alpha!}{\beta!} (x - x_0)^\beta$ qui s'annule donc en x_0 sauf si $\beta = 0$ lorsque cette quantité vaut $\alpha!$. Par ailleurs $\partial^\beta \chi(x_0) = 0$ sauf si

[§]Une telle suite s'obtient à partir de la régularisation de $\mathbf{1}_{B(x_0, r)} \text{sgn } f$ par une approximation de l'unité à support compact: $(\mathbf{1}_{B(x_0, r)} \text{sgn } f) * \chi_n$ où $\chi_n = n^d \chi(n(x - x_0))$ et χ une fonction \mathcal{C}_c^∞ à support $B(0, r)$, positive, d'intégrale 1.

$\beta = 0$. En utilisant la formule de Leibnitz, on a

$$\partial^\alpha \varphi = \sum_{\beta \leq \alpha} \binom{\alpha}{\beta} \partial^{\alpha-\beta} (x-x_0)^\alpha \partial^\beta \chi.$$

Ainsi, en x_0 , $\partial^\alpha \varphi(x_0) = \alpha! \neq 0$. Mais alors $\langle \partial^\alpha \delta_{x_0}, \varphi \rangle = \partial^\alpha \varphi(x_0) = \alpha!$ donc $x_0 \in \text{supp } \partial^\alpha \delta_{x_0}$.

4.2. Distributions à support compact. Observons tout d'abord que toute distribution est limite (au sens des distributions) d'une suite de distributions à support compact. Il suffit en effet de fixer $\chi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^d)$ avec $\chi(x) = 1$ si $|x| \leq 1$, de poser $\chi_n(x) = \chi(x/n)$ puis $T_n = T\chi_n$. Alors si $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^d)$, $\varphi\chi_n = \varphi$ pour n assez grand (plus précisément pour n tel que $\text{supp } \varphi \subset B(0, n)$) et donc

$$\langle T_n, \varphi \rangle = \langle \chi_n T, \varphi \rangle = \langle T, \chi_n \varphi \rangle = \langle T, \varphi \rangle \rightarrow \langle T, \varphi \rangle.$$

Lemme 4.3. *Si $T \in \mathcal{D}'$ est à support compact, alors T est d'ordre fini et se prolonge en $T \in \mathcal{S}'$.*

Proof. Supposons que T soit à support compact, et soit $R > 0$ tel que $\text{supp } T \subset B(0, R)$. Soit $\chi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ une fonction telle que $\chi(x) = 1$ si $|x| \leq R$ et $\text{supp } \chi \subset B(0, 2R)$. Soit alors $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^d)$. On a $\varphi = \chi\varphi + (1-\chi)\varphi$ et $\chi\varphi, (1-\chi)\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ avec $\text{supp}(1-\chi)\varphi \subset \mathbb{R}^d \setminus B(0, R)$. Par définition du support, on a donc $\langle T, (1-\chi)\varphi \rangle = 0$ donc $\langle T, \varphi \rangle = \langle T, \chi\varphi \rangle + \langle T, (1-\chi)\varphi \rangle = \langle T, \chi\varphi \rangle$.

Il est alors facile de voir que T est d'ordre fini puisqu'il existe $C, N > 0$ tels que, pour toute $\psi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ avec $\text{supp } \psi \subset B(0, 2R)$,

$$|\langle T, \psi \rangle| \leq C \sup_{|\alpha| \leq N} \|\partial^\alpha \psi\|_\infty.$$

Mais, avec la formule de Leibnitz, si $\psi = \chi\varphi$ dont le support est dans $B(0, 2R)$

$$\|\partial^\alpha \psi\|_\infty \leq \sum_{\beta \leq \alpha} \binom{\alpha}{\beta} \|\partial^{\alpha-\beta} \chi\|_\infty \|\partial^\beta \varphi\|_\infty \leq C_\alpha \sup_{|\beta| \leq N} \|\partial^\beta \varphi\|_\infty$$

où C_α ne dépend que de α (et de χ) mais pas de φ . On a donc

$$(4.9) \quad |\langle T, \varphi \rangle| \leq C \sup_{|\alpha| \leq N} C_\alpha \sup_{|\beta| \leq N} \|\partial^\beta \varphi\|_\infty.$$

Ainsi T est bien d'ordre au plus N .

On prolonge ensuite T en une forme linéaire sur $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ en posant $\langle T, \varphi \rangle = \langle T, \varphi\chi \rangle$. On a déjà vu que T est bien défini ainsi si $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty$, ceci est donc bien un prolongement de T à $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$. Le calcul précédent est toujours valable et (4.9) montre que $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$. \square

Notation 4.4. On note $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^d)$ l'ensemble des distributions à support compact. On a donc $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^d) \subset \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d) \subset \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$.

Remarque 4.5. On a vu que si $\chi = 1$ au voisinage du support de T alors on prolonge T en une distribution tempérée en posant $\langle T, \varphi \rangle = \langle T, \chi\varphi \rangle$ pour tout $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$.

Il se trouve que cette définition ne dépend pas du choix de χ .

En effet, soit T une distribution à support compact et soient $\chi, \tilde{\chi}$ deux fonctions \mathcal{C}^∞ à support compact telles que $\chi(x) = \tilde{\chi}(x) = 1$ pour tout $x \in V$ où V est un ouvert contenant $\text{supp } T$. Alors si $\varphi \in \mathcal{S}$, $(\chi - \tilde{\chi})\varphi$ est une fonction de \mathcal{C}_c^∞ dont le support est dans

$\mathbb{R}^d \setminus V \subset \mathbb{R}^d \setminus \text{supp } T$. Par définition du support, on a donc $\langle T, (\chi - \tilde{\chi})\varphi \rangle = 0$ ou encore $\langle T, \chi\varphi \rangle = \langle T, \tilde{\chi}\varphi \rangle$.

On remarque de plus que cela permet de d'étendre la définition de T aux fonctions qui ne sont \mathcal{C}^∞ qu'au voisinage de $\text{supp } T$. Par exemple, si $\text{supp } T \subset B(0, R)$ et si φ est une fonction \mathcal{C}^∞ sur $B(0, R)$, on peut prolonger φ par 0 en-dehors de $B(0, R)$ (on n'aura pas une fonction \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R}^d). On prend alors $\chi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ telle que $\chi = 1$ sur $\text{supp } T$ et $\chi = 0$ sur $\mathbb{R}^d \setminus B(0, R)$. On peut alors poser $\langle T, \varphi \rangle = \langle T, \chi\varphi \rangle$. On remarque que $\chi\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty$ donc ceci a parfaitement un sens.

Remarque 4.6. On a $\text{supp } \tau_a T = \text{supp } T - a$. Cette propriété provient directement du même fait pour les fonctions \mathcal{C}^∞ . Nous laissons cela en exercice.

Théorème 4.7. *Soit $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ telle que $\text{supp } T = \{x_0\}$. Alors il existe N et $\{c_\alpha : \alpha \in \mathbb{N}^d, |\alpha| \leq N\}$ tel que*

$$T = \sum_{|\alpha| \leq N} c_\alpha \partial^\alpha \delta_{x_0}.$$

Démonstration. Avec la remarque précédente, il suffit de considérer $x_0 = 0$.

Pour simplifier, nous allons nous placer en dimension $d = 1$. Nous avons déjà vu que T était d'ordre fini puisque $\{0\}$ est compact et nous allons noter N l'ordre de T .

Fixons $\chi \in \mathcal{C}^\infty$ avec $\chi(x) = 1$ sur $[-1, 1]$ et $\chi(x) = 0$ si $|x| \geq 2$ et posons $\chi_\varepsilon(x) = \chi(x/\varepsilon)$.

Soit alors $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty$ et écrivons $\varphi = \chi_\varepsilon \varphi + (1 - \chi_\varepsilon)\varphi$. Comme $(1 - \chi_\varepsilon)\varphi$ est à support dans $\mathbb{R} \setminus [-\varepsilon, \varepsilon]$ et que le support de T est $\{0\}$, on a $\langle T, (1 - \chi_\varepsilon)\varphi \rangle = 0$ et donc

$$\langle T, \varphi \rangle = \langle T, \varphi \chi_\varepsilon \rangle.$$

Étape 1. *Si $\partial^k \varphi(0) = 0$ pour tout $k \leq N$ alors $\langle T, \varphi \rangle = 0$.*

En effet, $\partial^k \varphi(0) = 0$ pour tout $k \leq N$ alors $|\partial^k \varphi(t)| = O(t^{N-k+1})$ en 0 (il suffit d'écrire la formule de Taylor de $\partial^k \varphi(t)$) i.e. il existe ε_k tel que $|\partial^k \varphi(t)| \leq C_k t^{N-k+1}$ si $|t| \leq \varepsilon_k$.

On prend maintenant $\varepsilon < \frac{1}{2} \min_{k=0, \dots, N} \varepsilon_k$. Mais alors T étant d'ordre N ,

$$(4.10) \quad |\langle T, \varphi \rangle| = |\langle T, \chi_\varepsilon t^N \phi \rangle| \leq C \sup_{j \leq N} \|\partial^j [\chi_\varepsilon t^N \phi]_\varepsilon\|_\infty.$$

On écrit alors la formule de Leibnitz

$$\partial^j [\chi_\varepsilon \varphi]_\varepsilon = \sum_{k \leq j} \binom{j}{k} \partial^k \chi_\varepsilon \partial^{j-k} [\varphi].$$

Mais maintenant, $\partial^k \chi_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-k} \chi^{(k)}(x/\varepsilon)$ est supporté dans $\{|x| \leq 2\varepsilon\}$ et donc

$$|\partial^k \chi_\varepsilon \partial^{j-k} [\varphi]| \leq \varepsilon^{-k} \|\chi^{(k)}\|_\infty C_{j-k} (2\varepsilon)^{N-(j-k)+1} \leq 2^{N+1} \max_{k \leq N} \|\chi^{(k)}\|_\infty \max_{j \leq N} C_j \varepsilon^{N-j+1} \rightarrow 0$$

quand $\varepsilon \rightarrow 0$ puisque $j \leq N$. Mais alors, en faisant tendre $\varepsilon \rightarrow 0$ dans (4.10), on obtient $\langle T, \varphi \rangle = 0$ comme annoncé.

Étape 2. *Conclusion.*

Soit maintenant $\psi \in \mathcal{C}_c^\infty$ quelconque. On définit

$$\varphi(x) = \psi(x) - \sum_{j \leq N} \frac{\psi^{(j)}(0)}{j!} x^j \chi(x).$$

On remarque que $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty$ et que, comme $\chi = 1$ au voisinage de 0, son développement de Taylor en 0 s'annule jusqu'au rang N (au moins) donc φ vérifie les propriétés de l'étape 1. On en déduit donc que

$$(4.11) \quad 0 = \langle T, \varphi \rangle = \langle T, \psi \rangle - \sum_{j \leq N} \frac{\psi^{(j)}(0)}{j!} \langle T, x^j \chi(x) \rangle.$$

On pose alors $a_j = \frac{(-1)^j \langle T, x^j \chi(x) \rangle}{j!}$ (qui ne dépend pas de ψ et on remarque que $\psi^{(j)}(0) = (-1)^j \langle \partial^j \delta_0, \psi \rangle$). Mais alors (4.11) se lit

$$\langle T, \psi \rangle = \sum_{j \leq N} a_j \langle \partial^j \delta_0, \psi \rangle$$

pour tout ψ , soit encore $T = \sum_{j \leq N} a_j \partial^j \delta_0$ comme annoncé.

□

Exemple 4.8. Nous pouvons maintenant déterminer les distributions T telles que $x^m T = 0$ où m est un entier, $m \geq 1$.

En effet, commençons par montrer qu'une telle distribution est à support $\{0\}$. Soit donc $x_0 \neq 0$ et $r < |x_0|/2$ de sorte que $0 \notin [x_0 - r, x_0 + r]$. Soit $\varphi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ avec son support dans $[x_0 - r, x_0 + r]$. On peut alors définir ψ par $\psi(x) = x^{-m} \varphi(x)$ et remarquer que $\psi \in \mathcal{C}_c^\infty$ puisque $\varphi = 0$ au voisinage de 0. Mais alors

$$\langle T, \varphi \rangle = \langle T, x^m \psi \rangle = \langle x^m T, \psi \rangle = 0$$

(ceci a bien un sens puisque $x^m T \in \mathcal{D}'$ et $\psi \in \mathcal{C}_c^\infty$). Ainsi $x_0 \notin \text{supp } T$ donc $\text{supp } T \subset \{0\}$.

D'après le résultat précédent, T est donc une combinaison linéaire de dérivées de masses de Dirac,

$$T = \sum_{j=0}^N c_j \partial^j \delta_0.$$

Déterminons alors $x^m \partial^j \delta_0$: soit $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty$, on a

$$\begin{aligned} \langle x^m \partial^j \delta_0, \varphi \rangle &= \langle \partial^j \delta_0, x^m \varphi \rangle = (-1)^j \langle \delta_0, \partial^j [x^m \varphi] \rangle \\ &= (-1)^j \left\langle \delta_0, \sum_{k=0}^j \binom{j}{k} \partial^k [x^m] \partial^{j-k} \varphi \right\rangle \\ &= (-1)^j \sum_{k=0}^j \binom{j}{k} \langle \delta_0, \partial^k [x^m] \partial^{j-k} \varphi \rangle. \end{aligned}$$

Mais alors,

- si $k > m$, $\partial^k [x^m] = 0$ donc $\langle \delta_0, \partial^k [x^m] \partial^{j-k} \varphi \rangle = 0$;
- si $k < m$, $\partial^k [x^m] = 0$ en 0 donc $\langle \delta_0, \partial^k [x^m] \partial^{j-k} \varphi \rangle = \partial^k [x^m](0) \partial^{j-k} \varphi(0) = 0$;
- si $k = m$, $\partial^k [x^m] = m!$ est constant donc $\langle \delta_0, \partial^m [x^m] \partial^{j-m} \varphi \rangle = m! \partial^{j-m} \varphi(0)$.

Il en résulte donc que

$$\langle x^m \partial^j \delta_0, \varphi \rangle = \begin{cases} 0 & \text{si } j \neq m \\ (-1)^j \binom{j}{m} m! \partial^{j-m} \varphi(0) & \text{si } j \geq m \end{cases} = \begin{cases} 0 & \text{si } j \neq m \\ (-1)^m \binom{j}{m} m! \langle \partial^{j-m} \delta_0, \varphi \rangle & \text{si } j \geq m \end{cases}.$$

Ainsi $X^m T = 0$ si $N < m$ alors que si $N \geq m$,

$$x^m T = \sum_{j=m}^N c_j (-1)^m \binom{j}{m} m! \partial^{j-m} \delta_0$$

qui n'est nulle que si tous les c_j sont nuls.

En résumé:

Les distributions qui vérifient $x^m T$ sont les distributions de la forme $\sum_{j=0}^{m-1} c_j \partial^j \delta_0$.

5. DÉRIVATION ET INTÉGRATION DANS LE CROCHET DE DUALITÉ

5.1. Dérivation.

Théorème 5.1. Soit $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ et soit $\varphi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^D)$ à support compact sur \mathbb{R}^d i.e. il existe $R > 0$ tel que, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^D$ avec $|x| > R$, $\varphi(x, y) = 0$. Alors $F : y \rightarrow \langle T, \varphi(\cdot, y) \rangle$ est de classe \mathcal{C}^∞ et $\partial^\alpha F = \langle T, \partial_y^\alpha \varphi(\cdot, y) \rangle$

Dans cet énoncé, $\langle T, \varphi(\cdot, y) \rangle$ signifie que la distribution T agit sur la fonction $x \rightarrow \varphi(x, y)$ et y est un paramètre. Une écriture commune alternative est $\langle T_x, \varphi(x, y) \rangle$.

Démonstration. Nous allons en fait montrer que si φ est de classe \mathcal{C}^2 en y alors $y \rightarrow \langle T, \varphi(\cdot, y) \rangle$ est de classe \mathcal{C}^1 et $\partial F = \langle T, \partial_y \varphi(\cdot, y) \rangle$. Une récurrence immédiate permettra de conclure.

Pour simplifier, nous allons nous concentrer sur la dimension $D = 1$. Le cas de la dimension supérieure est identique.

Soit alors $\varphi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R})$ et $R > 0$ telle que $\varphi(x, y) = 0$ si $|x| > R$. On commence par écrire la formule de Taylor avec reste intégral dans la variable y

$$\varphi(x, y_0 + h) = \varphi(x, y_0) + \partial_y \varphi(x, y_0) h + r(x, y_0, h)$$

avec

$$r(x, y_0, h) = \frac{h^2}{2} \int_0^1 (1-t) \partial_y^2 \varphi(x, y_0 + th) dt.$$

On remarque $r(x, y_0, h) = 0$ si $|x| > R$ et que $x \rightarrow r(x, y_0, h) \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^d)$. Bien évidemment $x \rightarrow \partial_y \varphi(x, y_0) \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^d)$. On peut donc écrire

$$\langle T, \varphi(x, y_0 + h) \rangle = \langle T, \varphi(\cdot, y_0) \rangle + h \langle T, \partial_y \varphi(\cdot, y_0) \rangle + \langle T, r(\cdot, y_0, h) \rangle.$$

Si on montre que $\langle T, r(\cdot, y_0, h) \rangle = o(h)$ on aura le résultat: $F : y \rightarrow \langle T, \varphi(x, y) \rangle$ sera dérivable en y_0 de dérivée $\langle T, \partial_y \varphi(\cdot, y_0) \rangle$.

Mais la formule du reste intégral et la dérivation sous l'intégrale (justifiée par le théorème de dérivation des intégrales: fonction \mathcal{C}^∞ , intégration sur un compact) nous donne, pour

tout α , pour $|h| \leq 1$

$$\begin{aligned} |\partial_x^\alpha r(x, y_0, h)| &= \frac{h^2}{2} \left| \int_0^1 (1-t) \partial_x^\alpha \partial_y^2 \varphi(x, y_0 + th) dt \right| \\ &\leq \frac{h^2}{2} \int_0^1 (1-t) |\partial_x^\alpha \partial_y^2 \varphi(x, y_0 + th)| dt \\ &\leq \frac{h^2}{2} \sup_{|x| \leq R, |y-y_0| \leq 1} |\partial_x^\alpha \partial_y^2 \varphi(x, y)|. \end{aligned}$$

Mais $T \in \mathcal{D}'$, il existe donc C, N tel que, pour tout $\psi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^d)$ avec $\text{supp } \psi \subset B(0, R)$,

$$|\langle T, \psi \rangle| \leq C \sup_{|\alpha| \leq N} \|\partial^\alpha \psi\|.$$

En appliquant cela à $x \rightarrow r(x, y_0, h)$ on a

$$|\langle T, r(x, y_0, h) \rangle| \leq h^2 \frac{C}{2} \sup_{|\alpha| \leq N} \sup_{|x| \leq R, |y-y_0| \leq 1} |\partial_x^\alpha \partial_y^2 \varphi(x, y)| = O(h^2)$$

comme souhaité.

Le cas de la dimension $D \geq 2$ requière d'utiliser la formule de Taylor à plusieurs variables

$$\varphi(x, y_0 + h) = \varphi(x, y_0) + \langle \nabla \varphi(x, y_0), h \rangle + 2 \sum_{|\alpha|=2} \frac{h^\alpha}{2} \int_0^1 (1-t) \partial_y^\alpha \varphi(x, y_0 + th) dt.$$

□

Exemple 5.2. Soit $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$, alors pour toute $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^d)$, $y \rightarrow \langle T_x, \varphi(x-y) \rangle \in \mathcal{C}^\infty$.

Un exemple un peu plus évolué: si $b \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^d)$ alors pour tout $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^d)$, $y \rightarrow \langle (\tau_y b)T, \varphi \rangle \in \mathcal{C}^\infty$ puisque $\langle (\tau_y b)T, \varphi \rangle = \langle T_x, b(x-y)\varphi(x) \rangle$.

5.2. Intégration.

Théorème 5.3. Soit $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ et $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^D)$. Alors

$$\int_{\mathbb{R}^D} \langle T, \varphi(\cdot, y) \rangle dy = \langle \int_{\mathbb{R}^D} T, \varphi(\cdot, y) dy \rangle.$$

Démonstration. Notons qu'on suppose ici que φ est à support compact dans les deux variables: il existe $R > 0$ tel que $\varphi(x, y) = 0$ si $|x| > R$ ou $|y| > R$ i.e. φ est à support $[-R, R]^d \times [-R, R]$. Pour simplifier, nous allons à nouveau nous contenter du cas $D = 1$.

On veut donc démontrer que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \langle T_x, \varphi(x, t) \rangle dt = \langle T, \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x, t) dt \rangle$$

L'idée de la démonstration est d'introduire un paramètre dans l'intégrale et de montrer

$$\int_{-\infty}^{+y} \langle T_x, \varphi(x, t) \rangle dt = \langle T, \int_{-\infty}^y \varphi(x, t) dt \rangle$$

à l'aide du théorème de dérivation.

On prend $\chi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$, $\chi \geq 0$, $\chi(y) = 0$ si $|y| > R$ et $\int_{\mathbb{R}} \chi(y) dy = 1$ et on pose

$$\psi(x, y) = \varphi(x, y) - \chi(y) \int_{\mathbb{R}} \varphi(x, t) dt.$$

Très clairement, ψ est à support $[-R, R]^d \times [-R, R]$, ψ est \mathcal{C}^∞ (l'intégrale en t est en fait sur $[-R, R]$, donc aucune difficulté à dériver sous le signe intégral) et $\int_{\mathbb{R}} \psi(x, y) dy = 0$.

On définit ensuite $\zeta(x, y) = \int_{-\infty}^y \psi(x, t) dt$. Très clairement, ζ est \mathcal{C}^∞ , $\zeta(x, y) = 0$ si $|x| > R$, $\zeta(x, y) = 0$ si $y < -R$. Enfin, si $t > R$, $\psi(x, t) = 0$ donc si $y > R$, $\zeta(x, y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(x, t) dt = 0$. Ainsi $\zeta \in \mathcal{C}_c^\infty$. On peut donc définir $y \rightarrow \langle T, \zeta(\cdot, y) \rangle$. En dérivant cette fonction à l'aide du théorème précédent, on obtient

$$\partial \langle T, \zeta(\cdot, y) \rangle = \langle T, \partial_y \zeta(\cdot, y) \rangle = \langle T, \psi(\cdot, y) \rangle$$

donc en utilisant que $\langle T, \chi(\cdot, y) \rangle = \langle T, \zeta(\cdot, y) \rangle = 0$ si $y < -R$, on en déduit que

$$\int_{-\infty}^y \langle T, \psi(\cdot, y) \rangle = \langle T, \zeta(\cdot, y) \rangle = \langle T, \int_{-\infty}^y \psi(x, t) dt \rangle.$$

On utilise ensuite que $\psi(\cdot, y) = 0$ si $y > R$ pour obtenir

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \langle T, \psi(\cdot, y) \rangle &= \int_{-\infty}^R \langle T, \psi(\cdot, y) \rangle = \langle T, \int_{-\infty}^R \psi(x, t) dt \rangle \\ &= \langle T, \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(x, t) dt \rangle = 0. \end{aligned}$$

Mais, par définition

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{-\infty}^{+\infty} \langle T, \psi(\cdot, y) \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \langle T, \varphi(\cdot, y) \rangle - \int_{-\infty}^{+\infty} \chi(y) \langle T, \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x, t) dt \rangle dy \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \langle T, \varphi(\cdot, y) \rangle dy - \langle T, \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x, t) dt \rangle \end{aligned}$$

qui est bien l'identité cherchée. \square

6. CONVOLUTION

6.1. Convolution d'une distribution avec une fonction. Nous allons maintenant définir $b * T$. Commençons par les cas $b \in \mathcal{C}_c^\infty$. Faisons comme d'habitude en regardant le cas $T = T_f$ avec $f \in L^1$:

$$b * f(x) = \int_{\mathbb{R}^d} f(t) b(x - t) dt = \langle T_f, b(x - \cdot) \rangle.$$

Proposition 6.1. *Soit $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ et $b \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ alors $b * T$ est la fonction sur \mathbb{R}^d définie par $b * T(x) = \langle T, b(x - \cdot) \rangle$. Alors $b * T \in \mathcal{C}^\infty$ avec, pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^d$, $\partial^\alpha b * T = (\partial^\alpha * T)$.*

*Si de plus, T est à support compact, alors $b * T$ est à support compact avec*

$$\text{supp } b * T \subset \text{supp } b + \text{supp } T.$$

Ici $A + B = \{a + b : a \in A, b \in B\}$.

Démonstration. Il suffit d'appliquer le théorème de dérivation 5.1 pour obtenir la première partie. Pour le support, on remarque d'abord que $\text{supp } \varphi(x - \cdot) = \{x\} - \text{supp } \varphi$ donc si $x \in \text{supp } b + \text{supp } T$ alors $\text{supp } \varphi(x - \cdot) \cap \text{supp } T = \emptyset$ donc $b * T(x) = \langle T, \varphi(x - \cdot) \rangle = 0$. \square

Remarque 6.2. Si T est à support compact, il est inutile de supposer que b le soit également. Tout d'abord, on prend χ une fonction \mathcal{C}_c^∞ qui vaut 1 au voisinage du support de T . Alors $\langle T, \varphi \rangle = \langle T, \chi \varphi \rangle$ pour tout $\varphi \in \mathcal{C}^\infty$.

On définit alors $b * T(x) = \langle T, b(x - \cdot) \rangle = \langle T, \chi(\cdot) b(x - \cdot) \rangle$ et la proposition précédente s'étend à ce cas.

Théorème 6.3 (Régularisation des distributions). *Soit $\zeta \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ telle que $\zeta \geq 0$ et $\int_{\mathbb{R}^d} \zeta(x) dx = 1$. Pour $\lambda > 0$, posons $\zeta_\lambda(t) = \lambda^{-d} \zeta(x/\lambda)$. Soit $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$. Alors $\zeta_\lambda * T \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^d)$ et $\zeta_\lambda * T \rightarrow T$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ quand $\lambda \rightarrow 0$. En particulier, \mathcal{C}_c^∞ est dense dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$.*

Démonstration. Le fait que $\zeta_\lambda * T \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^d)$ a été vu dans la proposition précédente.

On veut donc démontrer que $\langle \zeta_\lambda * T, \varphi \rangle \rightarrow \langle T, \varphi \rangle$ pour tout $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty$. Mais

$$\begin{aligned} \langle \zeta_\lambda * T, \varphi \rangle &= \int_{\mathbb{R}^d} \langle T_x, \zeta_\lambda(t-x) \rangle \varphi(t) dt = \int_{\mathbb{R}^d} \langle T_x, \zeta_\lambda(t-x) \varphi(t) \rangle dt \\ &= \langle T_x, \int_{\mathbb{R}^d} \zeta_\lambda(t-x) \varphi(t) dt \rangle \end{aligned}$$

avec le théorème 5.3. Posons $\tilde{\zeta}_\lambda(x) = \zeta_\lambda(-x)$ et remarquons que $\tilde{\zeta}_\lambda$ est une approximation de l'unité donc

$$\tilde{\zeta}_\lambda * \varphi(x) = \int_{\mathbb{R}^d} \zeta_\lambda(t-x) \varphi(t) dt$$

est dans \mathcal{C}_c^∞ , car $\varphi, \zeta_\lambda \in \mathcal{C}_c^\infty$. En particulier, les conditions du théorème 5.3 sont bien remplies.

On a donc $\langle \zeta_\lambda * T, \varphi \rangle = \langle T, \tilde{\zeta}_\lambda * \varphi \rangle$. Mais si φ est fixé et $\lambda \leq 1$, il existe $R > 0$ tel que $\text{supp } \varphi, \text{supp } \zeta_\lambda * \varphi \subset B(0, R)$. Il existe alors $C, N > 0$ tel que, pour toute $\psi \in \mathcal{C}_c^\infty$ avec $\text{supp } \psi \subset B(0, R)$,

$$|\langle T, \psi \rangle| \leq C \sup_{|\alpha| \leq N} \|\partial^\alpha \psi\|_\infty.$$

On va appliquer cela à $\psi = \zeta_\lambda * \varphi - \varphi$ en remarquant que $\partial^\alpha [\zeta_\lambda * \varphi - \varphi] = \zeta_\lambda * (\partial^\alpha \varphi) - \partial^\alpha \varphi$ donc

$$\begin{aligned} |\langle \zeta_\lambda * T, \varphi \rangle - \langle T, \varphi \rangle| &= |\langle T, \zeta_\lambda * \varphi - \varphi \rangle| \\ &\leq C \sup_{|\alpha| \leq N} \|\partial^\alpha [\zeta_\lambda * \varphi - \varphi]\|_\infty \\ &= C \sup_{|\alpha| \leq N} \|\zeta_\lambda * (\partial^\alpha \varphi) - \partial^\alpha \varphi\|_\infty \rightarrow 0 \end{aligned}$$

quand $\lambda \rightarrow 0$. Cela provient du fait que si $\psi \in \mathcal{C}_c^\infty$ alors $\zeta_\lambda * \psi \rightarrow \psi$ uniformément et qu'on a un nombre fini de telles limites (rédaction laissée au lecteur).

Enfin, si on commence par approcher T par une distribution T_c à support compact puis T_c par $\zeta_\lambda * T_c$ (qui est de plus à support compact) on aura la densité de \mathcal{C}_c^∞ est dense dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$. Nous laissons les détails au lecteur. \square

6.2. Produit et produit de convolution de deux distributions. Une idée pour définir $S * T$ consiste à commencer par prendre S, T comme étant $S = T_f, T = T_g$ avec f, g des fonctions \mathcal{C}_c^∞ . Alors, si $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty$

$$\begin{aligned} \langle T_{f*g}, \varphi \rangle &= \int_{\mathbb{R}^d} f * g(x) \varphi(x) dx = \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} f(y) g(x-y) \varphi(x) dx dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} f(y) \left(\int_{\mathbb{R}^d} g(x-y) \varphi(x) dy \right) dx. \end{aligned}$$

On pose alors $Zg(t) = g(-t)$ et on remarque que $\int_{\mathbb{R}^d} g(x-y) \varphi(x) dy = (Zg) * \varphi$ donc

$$\langle T_{f*g}, \varphi \rangle = \langle T_f, (Zg) * \varphi \rangle = \langle T_f, T_{Zg} * \varphi \rangle.$$

On remarque aussi que

$$\langle T_{Zg}, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}^d} g(-x) \varphi(x) dx = \int_{\mathbb{R}^d} g(x) \varphi(-x) dx = \langle T_g, Z\varphi \rangle.$$

Cela nous conduit à la définition suivante:

Définition 6.4. Soit $S, T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ deux distributions avec T à support compact.

On définit alors $\check{T} \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ comme suit: pour tout $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^d)$, $\langle ZT, \varphi \rangle = \langle T, Z\varphi \rangle$ où $Z\varphi(x) = \varphi(-x)$.

On définit $S * T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ comme suit: pour tout $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^d)$, $\langle S * T, \varphi \rangle = \langle S, ZT * \varphi \rangle$.

On vérifie sans peine que $ZT \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$. On remarque ensuite avec la proposition 6.1 que $ZT * \varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ donc que $S * T$ est bien défini. Le fait que $S * T \in \mathcal{D}'$ est laissée en exercice (un peu pénible, il faut reprendre les estimations de $\|\partial^\alpha T * \varphi\|_\infty$ de la démonstration de la proposition 6.1).

On a les propriétés suivantes:

Proposition 6.5. Soient $S, T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ deux distributions avec T à support compact. Alors $S * T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ et $\partial^\alpha(S * T) = (\partial^\alpha S) * T = S * (\partial^\alpha T)$. Si de plus S est également à support compact alors $S * T = T * S$.

Démonstration. En effet,

$$\begin{aligned} \langle \partial^\alpha S * T, \varphi \rangle &= (-1)^{|\alpha|} \langle S * T, \partial^\alpha \varphi \rangle (-1)^{|\alpha|} \langle S, (ZT) * (\partial^\alpha \varphi) \rangle \\ &= (-1)^{|\alpha|} \langle S, \partial^\alpha ((ZT) * \varphi) \rangle = \langle \partial^\alpha S, (ZT) * \varphi \rangle \\ &= \langle (\partial^\alpha S) * T, \varphi \rangle. \end{aligned}$$

On a donc bien $\partial^\alpha S * T = (\partial^\alpha S) * T$.

Par ailleurs, remplaçons provisoirement la notation $\check{\phi}, \check{T}$ par l'opérateur $Z, Z : \phi \rightarrow \check{\phi}$ et $Z : T \rightarrow \check{T}$. En particulier, on a $\langle ZT, \varphi \rangle = \langle T, Z\varphi \rangle$ et $\partial^\alpha [Z\varphi] = (-1)^{|\alpha|} Z[\partial^\alpha \varphi]$. On obtient donc

$$\begin{aligned} \langle \partial^\alpha [ZT], \varphi \rangle &= (-1)^{|\alpha|} ZT, \partial^\alpha \varphi = (-1)^{|\alpha|} \langle T, Z[\partial^\alpha \varphi] \rangle \\ &= \langle T, \partial^\alpha [Z\varphi] \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle \partial^\alpha T, Z\varphi \rangle \\ &= (-1)^{|\alpha|} \langle Z[\partial^\alpha T], \varphi \rangle \end{aligned}$$

donc $\partial^\alpha [ZT] = (-1)^{|\alpha|} Z[\partial^\alpha T]$. Mais ensuite

$$\begin{aligned} \langle \partial^\alpha S * T, \varphi \rangle &= (-1)^{|\alpha|} \langle S, \partial^\alpha ((ZT) * \varphi) \rangle = \langle S, ((-1)^{|\alpha|} \partial^\alpha (ZT)) * \varphi \rangle \\ &= \langle S, (Z(\partial^\alpha T)) * \varphi \rangle = \langle S * (\partial^\alpha T), \varphi \rangle. \end{aligned}$$

On a donc bien $\partial^\alpha S * T = S * (\partial^\alpha T)$.

Si S et T sont toutes deux à support compact, alors $\langle S * T, \varphi \rangle = \langle S, \check{T} * \varphi \rangle$ et $\langle T * S, \varphi \rangle = \langle T, \check{S} * \varphi \rangle$. Pour vérifier que ces deux quantités sont identiques, on remarque qu'elles le sont si S et T sont (les distributions associées à) des fonctions de \mathcal{C}_c^∞ . Pour le cas général, on commence par régulariser et ensuite on passe à la limite après avoir montré que $(S, T) \rightarrow S * T$ est continue lorsqu'on fixe les supports de S et T (détails laissés aux lecteurs). \square

En guise d'exemple, regardons le cas des masses de Dirac et de leurs dérivées:

Lemme 6.6. Soient $a, b \in \mathbb{R}^d$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^d$, alors $(\partial^\alpha \delta_a) * (\partial^\beta \delta_b) = \partial^{\alpha+\beta} \delta_{a+b}$.

Démonstration. Tout d'abord, $\langle Z\delta_b, \varphi \rangle = \langle \delta_b, Z\varphi \rangle = \varphi(-b) = \langle \delta_{-b}, \varphi \rangle$. Ensuite $Z[\partial^\beta \delta_b] = (-1)^{|\beta|} \partial^\beta Z[\delta_b] = (-1)^{|\beta|} \partial^\beta \delta_{-b}$. Puis

$$\begin{aligned} (Z[\partial^\beta \delta_b]) * \varphi(x) &= ((-1)^{|\beta|} \partial^\beta \delta_{-b}) * \varphi(x) = (-1)^{|\beta|} \partial^\beta (\delta_{-b} * \varphi)(x) \\ &= (-1)^{|\beta|} \partial^\beta (\varphi(x+b)) = (-1)^{|\beta|} \partial^\beta \varphi(x+b). \end{aligned}$$

Enfin

$$\begin{aligned} \langle (\partial^\alpha \delta_a) * (\partial^\beta \delta_b), \varphi \rangle &= \langle \partial^\alpha \delta_a, (Z[\partial^\beta \delta_b]) * \varphi \rangle = (-1)^{|\beta|} \langle \partial^\alpha \delta_a, \partial^\beta \varphi(\cdot + b) \rangle \\ &= (-1)^{|\alpha|+|\beta|} \langle \delta_a, \partial^{\alpha+\beta} \varphi(\cdot + b) \rangle = (-1)^{|\alpha|+|\beta|} \partial^{\alpha+\beta} \varphi(a+b) \\ &= \langle \partial^{\alpha+\beta} \delta_{a+b}, \varphi \rangle \end{aligned}$$

comme annoncé. \square

La définition du produit de convolution plus général de deux distributions est délicate. Nous allons donner une seconde définition dans le cadre des distributions à support compact qui peut être étendu sous des conditions de support moins restrictifs.

Tout d'abord, rappelons qu'on ne peut pas définir de façon générale le produit de deux distributions sans risquer de se heurter à des incohérences. Par exemple, s'il est naturel de définir $\delta_a \delta_b = 0$ si $a \neq b$, on devrait ensuite avoir $\delta_a^2 = \lim_{b \rightarrow a} \delta_a \delta_b = 0$ Mais alors, en prenant χ_n une approximation de l'unité, $\chi_n \rightarrow \delta_0$, on aurait $\chi_n \delta_0 = \chi_n(0) \delta_0$ qui ne peut avoir de limite puisque $\chi_n(0) \rightarrow +\infty$.

On peut toutefois définir le *produit tensoriel* de deux distributions si $S \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ et $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^D)$ on définit $S \otimes T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^D)$ par

$$\langle S \otimes T, \varphi(x, y) \rangle = \langle S_x, \langle T_y, \varphi(x, y) \rangle \rangle \quad \varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^D).$$

On pourrait aussi définir

$$\langle S \otimes T, \varphi(x, y) \rangle = \langle T_y, \langle S_x, \varphi(x, y) \rangle \rangle \quad \varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^D).$$

Il se trouve que ces deux définitions conduisent toutes les deux à la même distribution (qui est bien une distribution). Notons aussi que $x \rightarrow \langle T_y, \varphi(x, y) \rangle$ et $y \rightarrow \langle S_x, \varphi(x, y) \rangle$ sont bien dans \mathcal{C}_c^∞ donc que ces définitions ont un sens.

On vérifiera sans peine que $\delta_x \otimes \delta_y = \delta_{(x,y)}$.

Si on souhaite définir la convolution de deux distributions S, T , on commence comme d'habitude par regarder le cas $S, T \in L^1_{loc}$. Comme la convolution usuelle n'est pas définie sur L^1_{loc} on va restreindre d'avantage en ne regardant que $S = T_f, T = T_g$ avec $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$. Alors si $\varphi \in \mathcal{C}^\infty_c(\mathbb{R}^d)$,

$$\begin{aligned} \langle f * g, \varphi \rangle &= \int_{\mathbb{R}^d} f * g(x) \varphi(x) dx = \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} f(t) g(x-t) \varphi(x) dt dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d} f(t) g(s) \varphi(s+t) ds dt = \langle f \otimes g, \varphi(s+t) \rangle. \end{aligned}$$

On voudrait donc définir $\langle S * T, \varphi \rangle = \langle S \otimes T, \phi \rangle$ où $\phi(x, y) = \varphi(x+y)$. L'ennui est que, bien que $\varphi \in \mathcal{C}^\infty_c(\mathbb{R}^d)$, $\phi \notin \mathcal{C}^\infty_c(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d)$ mais n'est pas à support compact. On ne peut donc utiliser cette définition en toute généralité.

Toutefois, les choses peuvent s'améliorer si les support de S et de T ne sont pas \mathbb{R}^d . En effet, si U (resp. V) est un ouvert qui contient le support de S (resp. de T) et si χ_S (resp. χ_T) est une fonction de $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^d)$ telle que $\chi_S = 1$ sur $\text{supp } S$ et à support dans U (resp. $\chi_T = 1$ sur $\text{supp } T$ et à support dans V) alors $S = \chi_S S$ (resp. $T = \chi_T T$). On voudrait alors définir $\langle S * T, \varphi \rangle = \langle \chi_S S \otimes \chi_T T, \phi \rangle = \langle S \otimes T, \chi_S \otimes \chi_T \phi \rangle$ où $\chi_S \otimes \chi_T \phi(x, y) = \chi_S(x) \chi_T(y) \varphi(x+y)$. Il est possible que cette dernière fonction soit à support compact *i.e.* si $\{(x, y) \in U \times V : x+y \in \text{supp } \varphi\}$ est borné.

Définition 6.7. *On dira que $S, T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ sont convolables s'il existe un voisinage U de $\text{supp } S$ et un voisinage V de $\text{supp } T$ tels que, pour tout $R > 0$, $\{x \in U, y \in V : |x+y| \leq R\}$ est borné.*

*Dans ce cas, on définit χ_S et χ_T comme ci-dessus et la convolution de S et T est définie par $\langle S * T, \phi \rangle = \langle S \otimes T, \phi \rangle = \langle S \otimes T, \chi_S \otimes \chi_T \phi \rangle$.*

En premier lieu, remarquons que si U (ou V est borné, $U \subset B(0, \rho)$ alors si $|x+y| \leq R$, $|y| \leq R+\rho$ donc $\{x \in U, y \in V : |x+y| \leq R\} \subset B(0, \rho) \times B(0, R+\rho)$ est borné. Ainsi, si S ou T est à support compact, S et T sont convolables. On peut montrer que cette définition de la convolution coïncide avec la précédente.

Un deuxième exemple est le suivant: supposons que $\text{supp } S \subset U = (-\infty, a)$ et $\text{supp } T \subset V = (-\infty, b)$ avec $a, b > 0$. Alors, si $x \in U$ et $y \in V$ avec $|x+y| \leq R$, *i.e.* $-R \leq x+y \leq R$ alors $x \geq -R-y \geq -R-b$ et de même $y \geq -R-a$. Ainsi, $(x, y) \in (-R-b, a) \times (-R-a, b)$ qui est borné donc S, T sont convolables.

En guise d'exemple, regardons ce que vaut $(\partial^\alpha \delta_a) * (\partial^\beta \delta_b)$. On commence par prendre $\chi \in \mathcal{C}^\infty_c$ qui vaut 1 au voisinage de (a, b) . Alors

$$\begin{aligned} \langle (\partial^\alpha \delta_a) * (\partial^\beta \delta_b), \varphi \rangle &= \langle (\partial^\alpha \delta_a)_x \otimes (\partial^\beta \delta_b)_y, \chi(x, y) \varphi(x+y) \rangle \\ &= (-1)^{|\alpha|+|\beta|} \langle \delta_a \otimes \delta_b, \partial_x^\alpha \partial_y^\beta [\chi(x, y) \varphi(x+y)] \rangle \\ &= (-1)^{|\alpha|+|\beta|} \partial_x^\alpha \partial_y^\beta [\chi(x, y) \varphi(x+y)](a, b). \end{aligned}$$

Mais, en utilisant la Formule de Leibnitz et le fait que $\chi(a, b) = 1$ mais $\partial_x^\alpha \partial_y^\beta \chi(a, b) = 0$ si $|\alpha|$ ou $|\beta| \geq 1$, toutes les dérivées doivent donc porter sur φ donc

$$\langle (\partial^\alpha \delta_a) * (\partial^\beta \delta_b), \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|+|\beta|} \partial^{\alpha+\beta} \varphi(a+b) = \langle \partial^{\alpha+\beta} \delta_{a+b}, \varphi \rangle.$$

On a donc montré

Lemme 6.8. *Soient $a, b \in \mathbb{R}^d$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^d$, alors $(\partial^\alpha \delta_a) * (\partial^\beta \delta_b) = \partial^{\alpha+\beta} \delta_{a+b}$.*

7. UNE AUTRE APPLICATION DES DISTRIBUTIONS AUX EDPs

7.1. Solution fondamentales. Nous allons dans cette partie nous intéresser à des équations aux dérivées partielles à coefficients constants, c'est-à-dire à des équations de la forme $P(\partial)u = f$ où P est un polynôme à d variables de degré N ,

$$P(x) = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^d, |\alpha| \leq N} a_\alpha x^\alpha \quad \text{donc} \quad P(\partial) = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^d, |\alpha| \leq N} a_\alpha \partial^\alpha$$

$f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ et la solution $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$.

Exemple 7.1. Voici quelques équations aux dérivées partielles classiques qui sont de cette forme

- (i) L'équation de transport $\partial_t u + \langle a, \nabla u \rangle = 0$ associée au polynôme $P(t, x_1, \dots, x_d) = t + a_1 x_1 + \dots + a_d x_d$.
- (ii) L'équation de la chaleur (ou de Fourier) $\partial_t u - \Delta u = f$ associée au polynôme $P(t, x_1, \dots, x_d) = t - x_1^2 + \dots - x_d^2$.
- (iii) L'équation de Schrödinger $i\partial_t u - \Delta u = f$ associée au polynôme $P(t, x_1, \dots, x_d) = it - x_1^2 + \dots - x_d^2$.
- (iv) L'équation de Laplace (ou de Poisson) de l'électrostatique, $\Delta u = f$ associée au polynôme $P(x_1, \dots, x_d) = x_1^2 + \dots + x_d^2$.
- (v) L'équation des ondes $\partial_t^2 u - \Delta u = f$ associée au polynôme $P(t, x_1, \dots, x_d) = t^2 - x_1^2 + \dots - x_d^2$.

Définition 7.2. Soit P un polynôme. L'équation homogène associée à l'équation $P(\partial)u = f$ est l'équation $P(\partial)u = 0$.

Une solution fondamentale (ou fonction de Green) de l'équation $P(\partial)u = f$ est une distribution $G \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ telle que $P(\partial)G = \delta$.

Lemme 7.3. Si u et \tilde{u} sont deux solutions de l'équation $P(\partial)u = f$, alors $v = \tilde{u} - u$ est solution de l'équation homogène.

Supposons que l'équation $P(\partial)u = \delta_0$ ait une solution fondamentale G . Si f est à support compact, alors $u = G * f$ est solution de l'équation $P(\partial)u = f$. Dans ce cas, u est la seule solution à support compact.

Proof. La première partie est immédiate et provient de la linéarité de l'équation. La seconde provient du fait que si f est à support compact, $G * f$ est bien défini et $\partial(G * f) = (\partial G) * f$ donc

$$P(\partial)(G * f) = (P(\partial)G) * f = \delta_0 * f = f.$$

Si G était à support compact, on pourrait se passer de l'hypothèse sur le support de f , malheureusement ce n'est jamais le cas.

Enfin, si T est une solution à support compact, $P(\partial)T = f$ alors

$$T = \delta * T = (P(\partial)G) * T = P(\partial)(G * T) = G * (P(\partial)T) = f * T$$

comme annoncé. □

Nous allons admettre le résultat (difficile) suivant

Théorème 7.4 (Ehrenpreis-Malgrange, 1955). *Tout opérateur différentiel à coefficient constant $P(\partial)$ admet une solution fondamentale.*

Avant de continuer, nous allons reformuler l'équation $P(\partial)u = f$ sous forme d'une équation de convolution $A * u = f$. Pour cela, nous allons utiliser le lemme suivant:

Lemme 7.5. *Soit $\alpha \in \mathbb{N}^d$ et $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$, alors $\partial^\alpha T = (\partial^\alpha \delta_0) * T$.*

En effet. , on a $T = \delta_0 * T$ et ceci a bien un sens puisque δ_0 est à support compact. De plus $\partial^\alpha T = \partial^\alpha(\delta_0 * T) = (\partial^\alpha \delta_0) * T$. \square

Ainsi, si $P = \sum_{|\alpha| \leq N} c_\alpha x^\alpha$, on peut lui associer

– l'opérateur différentiel $P(\partial) = \sum_{|\alpha| \leq N} c_\alpha \partial^\alpha$

– la distribution $P(\delta) = \sum_{|\alpha| \leq N} c_\alpha \partial^\alpha \delta_0$

et alors $P(\partial)T = P(\delta) * T$. Une équation aux dérivées partielles à coefficients constants $P(\partial)T = f$ se ramène donc à une équation de convolution $P(\delta) * T = f$.

Notons que d'autres types d'équations sont des équations de convolution. Par exemple, l'équation aux différences $\tau_a T - T = f$ se lit $(\delta_a - \delta_0) * T = f$.

Définition 7.6. *Soit A une distribution à support compact. L'équation $A * T = f$ est appelée équation de convolution.*

*On dit que A admet une solution fondamentale s'il existe une distribution G telle que $A * G = \delta_0$.*

Remarque 7.7. Analyse de Fourier et solution fondamentale

Avant de continuer, remarquons que l'analyse de Fourier permet de déterminer G . Nous admettrons que si A est à support compact, alors $\mathcal{F}[A]$ est une fonction \mathcal{C}^∞ . \spadesuit Par exemple $\mathcal{F}[P(\delta)] = P(-2i\pi\xi)$ (ou plus précisément, la distribution associée à $P(-2i\pi\xi)$). De plus $\mathcal{F}[A * G] = \mathcal{F}[A]\mathcal{F}[G]$ pour tout $G \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$. Ainsi s'il existe $G \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ tel que $A * G = \delta_0$ alors $\mathcal{F}[A]\mathcal{F}[G] = \mathcal{F}[\delta_0] = 1$ donc $\mathcal{F}[G] = 1/\mathcal{F}[A]$. Deux difficultés se présentent alors, d'une part, il faut pouvoir montrer que $1/\mathcal{F}[A] \in \mathcal{S}'$ ce qui permet de définir $G \in \mathcal{S}'$ par $\mathcal{F}[G] = 1/\mathcal{F}[A]$, d'autre part, il faut être capable de d'inverser cette transformée de Fourier (ou au moins d'obtenir des estimations sur G à partir de sa transformée de Fourier).

Théorème 7.8 (Régularité des solutions). *Soit P un polynôme et G sa solution fondamentale de $P(\partial)G = \delta_0$. Supposons que G est une fonction \mathcal{C}^∞ sur $\mathbb{R}^d \setminus \{0\}$. Alors si $f \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^d)$, toute solutions de $P(\partial)u = f$ est dans $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^d)$.*

Notons que la distribution G ne peut être \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R}^d puisqu'alors $\delta = P(\partial)G$ serait \mathcal{C}^∞ .

Démonstration. Commençons par donner le sens précis de ce théorème:

Dire que G est une fonction \mathcal{C}^∞ sur $\mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ signifie que, pour toute fonction $x_0 \neq 0$, pour tout $\chi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ avec $\chi(x) = 1$ au voisinage de x_0 et $\chi(x) = 0$ au voisinage de 0 , $\chi T = T_f$ avec f une fonction \mathcal{C}^∞ .

Ensuite, à f on associe la distribution T_f et ce que nous affirmons est que si $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ est tel que $P(\partial)T = f$ alors $T = T_g$ avec $g \in \mathcal{C}^\infty$.

Soit donc $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ tel que $P(\partial)T = T_f$ et soit $x_0 \in \mathbb{R}^d$. Soit $\psi \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^d)$ telle que $\psi = 1$ sur $B(x_0, r_0)$. Alors ψu est une distribution à support compact. Commençons par écrire $G * P(\delta) = P(\delta) * G = \delta_0$ et $P(\delta) * u = T_f$. Donc $\chi T = \delta_0 * (\chi T) = (G * P(\delta)) * (\chi T) = G * (P(\delta) * (\chi T))$ puisque le produit de convolution est associatif.

\spadesuit Le théorème de Paley-Wiener-Schwarz nous dit que $\mathcal{F}[A]$ est en fait une fonction entière d'ordre 1 et donne aussi une réciproque que nous n'utiliserons pas ici.

Ensuite, la formule de Leibnitz se lit

$$\partial^\beta(\chi T) = \chi \partial^\beta T + \sum_{0 \neq \gamma \leq \beta} \binom{\beta}{\gamma} \partial^\beta \chi \partial^{\beta-\gamma} T.$$

Comme $\chi = 1$ sur $B(x_0, r_0)$, $\partial^\beta \chi = 0$ si $\beta \neq 0$ sur $B(x_0, r_0)$ et on peut donc écrire $\partial^\beta(\chi T) = \chi \partial^\beta T + R_\beta$ où le support de R_β est compact et n'intersecte pas $B(x_0, r_0)$. Ainsi

$$P(\delta) * (\chi T) = \chi P(\delta) * T + R = \chi T_f + R$$

avec R une distribution dont le support est compact et n'intersecte pas $B(x_0, r_0)$. Par suite

$$\chi T = G * (P(\delta) * (\chi T)) = G * (\chi T_f) + G * R.$$

Notons que $\chi T_f = T_{\chi f}$ et que $\chi f \in C_0^\infty$ donc $G * (\chi T_f) \in C^\infty$ par les propriétés de régularisation de la convolution. Il reste donc à démontrer que $G * R \in C^\infty$ au voisinage de x_0 .

Soit $\theta \in C_c^\infty$ une fonction qui vaut 1 sur une boule $B(0, \rho)$ et 0 en-dehors de $B(0, 2\rho)$. On écrit

$$G * R = (\theta G) * R + ((1 - \theta)G) * R.$$

Comme $(1 - \theta)G \in C^\infty$, on a $((1 - \theta)G) * R \in C^\infty$.

Montrons maintenant que si θ est bien choisi, $(\theta G) * R$ est C^∞ au voisinage de 0 (en fait, nul). Pour cela, notons qu'on peut choisir $\rho < r_0/4$ de sorte que $B(x_0, r_0/2)$ n'intersecte pas le supp $R + B(0, 2\rho) \supset \text{supp } R + \text{supp } \theta \supset \text{supp } R * \theta$. En particulier, si φ est à support dans $B(x_0, r_0/2)$ alors $\langle (\theta G) * R, \varphi \rangle = 0$ donc $(\theta G) * R = 0$ au voisinage de x_0 . \square

7.2. Solution fondamentale du laplacien. L'objet de cette section est de déterminer une solution fondamentale du laplacien *i.e.* une fonction G de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ telle que $-\Delta G = \delta_0$.

Rappelons que G n'est pas unique, nous allons donc chercher G aussi symétrique que possible.

Le cas de la dimension 1 est simple, on veut résoudre $-G'' = \delta_0$. On sait déjà que la fonction de Heaviside est une primitive de δ_0 donc $G'(x) = -H(x) - c_0$ avec c_0 une constante. Mais alors il suffit d'intégrer $G(x) = \int_0^x -H(t) - c_0 dt + c_1 = -x_+ - c_0 x + c_1$ où $x_+ = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$. Le choix $c_1 = 0$ et $c_0 = -1/2$ nous donne $G(x) = -\frac{1}{2}|x|$.

Nous allons maintenant nous pencher sur le cas de la dimension $d \geq 2$. Avant cela, remarquons que δ_0 et Δ sont invariants par transformation orthogonale (donc par rotation). Plus précisément, si $A \in O(d)$ est une matrice orthogonale, $|\det A| = 1$ donc $\Delta_A \delta_0 = \delta_0$ et $\Delta(f \circ A) = (\Delta f) \circ A$. Nous chercherons donc G sous la forme d'une fonction radiale[¶].

Écrivons donc $G(x) = f(|x|)$. Rappelons que $|x| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_d^2}$ est une fonction C^∞ sur $\mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ et alors, un exercice de calcul différentiel nous montre que

$$\Delta G(x) = \frac{1}{r^{d-1}} \frac{d}{dr} \left(r^{d-1} \frac{d}{dr} \right) f(r) \quad r = |x| > 0.$$

[¶]Nous n'affirmons pas *a priori* qu'une telle solution élémentaire existe, mais il se trouve que nous en trouverons une.

Ainsi, pour $x \neq 0$, on trouve $r^{d-1} \frac{d}{dr} f(r) = c$ une constante *i.e.* $f(r) = cr^{-d+1}$. Par suite, un candidat pour G est

$$G(x) = \begin{cases} c_2 \ln |x| & \text{pour } d = 2 \\ \frac{c_d}{|x|^{d-2}} & \text{pour } d \geq 3 \end{cases}$$

avec c_d une constante. Notons que G est bien \mathcal{C}^∞ sur $\mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ et vérifie $\Delta G = 0$ sur cet ensemble. De plus $G \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^d) \subset \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$: en intégrant en coordonnées sphériques

$$\int_{B(0,R)} |G(x)| dx = \int_{\mathbb{S}^{d-1}} \int_0^R |G(r\zeta)| r^{d-1} dr d\sigma_d(\zeta)$$

où $\mathbb{S}^{d-1} = \{x \in \mathbb{R}^d : |x| = 1\}$ est la sphère unité de \mathbb{R}^{d-1} et $d\sigma_{d-1}$ la mesure de Lebesgue (de surface) de \mathbb{S}^{d-1} . Donc

$$(7.12) \quad \int_{B(0,R)} |G(x)| dx = \begin{cases} \sigma_{d-1}(\mathbb{S}^{d-1}) \int_0^R r dr & \text{si } d \geq 3 \\ 2\pi \int_0^R r |\ln r| dr & \text{si } d = 2 \end{cases} < +\infty.$$

Comme $\Delta G = 0$ sur $\mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ est vrai en tant que fonction, donc encore en tant que distribution *i.e.* pour toute $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ avec $\text{supp } \varphi \subset \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$, $\langle -\Delta G, \varphi \rangle = -\langle G, \Delta \varphi \rangle = 0$.

Il s'agit maintenant de déterminer c_d pour que $-\Delta G = \delta_0$, c'est-à-dire pour toute $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^d)$, $\langle -\Delta G, \varphi \rangle = \langle \delta_0, \varphi \rangle = \varphi(0)$.

Nous allons admettre qu'il suffit de prendre φ radiale. Le raisonnement est le suivant: rappelons que G est radiale, c'est-à-dire si $A \in SO(d)$ est une matrice de rotation (donc $\det A = 1$), alors $G(x) = G(Ax)$. En terme de distributions, nous avons noté cela $G = \delta_A G$. On a alors

$$\langle \Delta G, \varphi \rangle = \langle G, \Delta \varphi \rangle = \langle \delta_A G, \Delta \varphi \rangle = \langle G, \delta_{A^{-1}} \Delta \varphi \rangle = \langle G, \Delta[\delta_{A^1} \varphi] \rangle$$

car le laplacien est invariant par rotation sur les fonctions $\delta_A \Delta \varphi = \Delta[\delta_A \varphi]$. On utilise ensuite que G est une fonction localement intégrable donc

$$\langle \Delta G, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}^d} G(x) \Delta[\delta_{A^1} \varphi](x) dx.$$

Le membre de gauche ne dépend pas de G alors que celui de droite si, on peut donc faire une moyenne sur les rotations. Une telle moyenne existe car, par exemple, le groupe des rotations est compact ou alors en paramétrant l'ensemble des rotations. et intégrer sur l'ensemble des rotations est simplement intégrer par rapport à θ . On trouve alors en utilisant Fubini

$$\langle \Delta G, \varphi \rangle = \int_{SO(d)} \int_{\mathbb{R}^d} G(x) \Delta[\delta_B \varphi](x) dx d\nu(B) = \int_{\mathbb{R}^d} G(x) \int_{SO(d)} \Delta[\delta_B \varphi](x) d\nu(B) dx.$$

Il reste à voir que

$$\int_{SO(d)} \Delta[\delta_B \varphi](x) d\nu(B) = \Delta \left[\int_{SO(d)} \varphi(Bx) d\nu(B) \right]$$

et $\int_{SO(d)} \varphi(Bx) d\nu(B)$ est radiale.

Par exemple, lorsque $d = 2$, l'ensemble des rotations est l'ensemble des matrices de la forme $\begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$. Les étapes sont alors les suivantes

$$\begin{aligned} \langle \Delta G, \varphi \rangle &= \int_{\mathbb{R}^2} c_2 \ln \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} (\partial_x^2 + \partial_y^2) \varphi(x \cos \theta + y \sin \theta, -x \sin \theta + y \cos \theta) dx dy \\ &= \int_0^{2\pi} \int_{\mathbb{R}^2} c_2 \ln \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} (\partial_x^2 + \partial_y^2) \varphi(x \cos \theta + y \sin \theta, -x \sin \theta + y \cos \theta) dx dy d\theta \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} c_2 \ln \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \int_0^{2\pi} (\partial_x^2 + \partial_y^2) \varphi(x \cos \theta + y \sin \theta, -x \sin \theta + y \cos \theta) d\theta dx dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} c_2 \ln \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} (\partial_x^2 + \partial_y^2) \left(\int_0^{2\pi} \varphi(x \cos \theta + y \sin \theta, -x \sin \theta + y \cos \theta) d\theta \right) dx dy. \end{aligned}$$

Il est alors facile de voir que

$$(x, y) \rightarrow \int_0^{2\pi} \varphi(x \cos \theta + y \sin \theta, -x \sin \theta + y \cos \theta) d\theta$$

est radiale.

Nous voulons donc montrer que $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ radiale, $\langle -\Delta G, \varphi \rangle = \langle \delta_0, \varphi \rangle = \varphi(0)$. Pour cela, commençons par noter que

$$\langle -\Delta G, \varphi \rangle = \sum_{j=1}^d \langle -\partial_j^2 G, \varphi \rangle = \sum_{j=1}^d \langle \partial_j G, \partial_j \varphi \rangle.$$

Mais, en écrivant $|x|^{-d+2} = (x_1^2 + \dots + x_d^2)^{-\frac{d+2}{2}}$ si $d \geq 3$ et $\ln|x| = \frac{1}{2} \ln(x_1^2 + x_2^2)$ on obtient immédiatement que

$$\partial_j G = \begin{cases} -(d-2)c_d \frac{x_j}{|x|^d} & \text{si } d \geq 3 \\ c_2 \frac{x_j}{|x|^2} & \text{si } d = 2 \end{cases}.$$

En particulier

$$\nabla G = \begin{cases} -(d-2)c_d \frac{x}{|x|^d} & \text{si } d \geq 3 \\ c_2 \frac{x}{|x|^2} & \text{si } d = 2 \end{cases}.$$

Cette fonction est radiale, $|\nabla G(x)| = \kappa_d |x|^{-(d-1)}$ avec $\kappa_2 = c_2$ et $\kappa_d = (d-2)c_d$ si $d \geq 3$. De plus $|\nabla G(x)| \in L_{loc}^1$:

$$\int_{B(0,R)} |\nabla G(x)| dx = \sigma_{d-1}(\mathbb{S}^{d-1}) \int_0^R |\nabla G(r\zeta)| r^{d-1} dr = \kappa_d \sigma_{d-1}(\mathbb{S}^{d-1}) R < +\infty.$$

Par suite, chaque coordonnée de ∇G est dans $L_{loc}^1 \subset \mathcal{S}'$ et alors

$$\begin{aligned} \langle -\Delta G, \varphi \rangle &= \int_{\mathbb{R}^d} \sum_{j=1}^d \partial_j G(x) \partial_j \varphi(x) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} \langle \nabla G(x), \nabla \varphi(x) \rangle dx \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{|x| \geq \varepsilon} \langle \nabla G(x), \nabla \varphi(x) \rangle dx \end{aligned}$$

puisque cette intégrale converge (∇G est localement intégrable et $\nabla\varphi$ est bornée à support compact).** Mais maintenant, φ étant radiale, on écrit $\varphi(x) = \phi(|x|)$ avec ϕ de classe \mathcal{C}^∞ sur $]0, +\infty)$ et alors $\nabla\varphi(x) = \frac{x}{|x|}\phi'(|x|)$ si $x \neq 0$.

Séparons les cas $d = 2$ et $d \geq 3$. Commençons par $d \geq 3$, on a

$$\begin{aligned} \int_{|x| \geq \varepsilon} \langle \nabla G(x), \nabla\varphi(x) \rangle dx &= = -(d-2)c_d \int_{|x| \geq \varepsilon} \left\langle \frac{x}{|x|^d}, \frac{x}{|x|} \right\rangle \phi'(|x|) dx \\ &= -(d-2)c_d \int_{|x| \geq \varepsilon} \frac{1}{|x|^{d-1}} \phi'(|x|) dx \\ &= -(d-2)c_d \sigma_{d-1}(\mathbb{S}^{d-1}) \int_{\varepsilon}^{+\infty} \phi'(r) dr \\ &= (d-2)c_d \sigma_{d-1}(\mathbb{S}^{d-1}) \phi(\varepsilon) \end{aligned}$$

où on est passé en coordonnées sphériques dans la dernière intégrale et on a utilisé le fait qu'on intégrait une fonction radiale. Par suite, en faisant $\varepsilon \rightarrow 0$, et en remarquant que $\phi(\varepsilon) = \varphi(\varepsilon, 0, \dots, 0)$ on a

$$\langle -\Delta G, \varphi \rangle = (d-2)c_d \sigma_{d-1}(\mathbb{S}^{d-1}) \phi(0).$$

Il suffit donc de choisir $c_d = \frac{1}{(d-2)\sigma_{d-1}(\mathbb{S}^{d-1})}$ pour que G soit une solution fondamentale du laplacien.

Le cas $d = 2$ ne diffère que très peu:

$$\begin{aligned} \int_{|x| \geq \varepsilon} \langle \nabla G(x), \nabla\varphi(x) \rangle dx &= = c_2 \int_{|x| \geq \varepsilon} \left\langle \frac{x}{|x|^2}, \frac{x}{|x|} \right\rangle \phi'(|x|) dx \\ &= c_2 \int_{|x| \geq \varepsilon} \frac{1}{|x|} \phi'(|x|) dx = 2\pi c_2 \int_{\varepsilon}^{+\infty} \phi'(r) dr \\ &= -2\pi c_2 \phi(\varepsilon) \rightarrow -2\pi c_2 \phi(0) \end{aligned}$$

quand $\varepsilon \rightarrow 0$. On choisit donc $c_2 = -1/(2\pi)$.

En résumé:

Théorème 7.9 (Solution fondamentale du laplacien sur \mathbb{R}^d). *La distribution E associée à la fonction localement intégrable G définie sur $\mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ par*

$$G(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2}|x| & \text{si } d = 1 \\ -\frac{1}{2\pi} \ln |x| & \text{si } d = 2 \\ \frac{1}{(d-2)\sigma_{d-1}(\mathbb{S}^{d-1})|x|^{d-2}} & \text{si } d \geq 3 \end{cases}$$

est une solution fondamentale du laplacien $-\Delta E = \delta_0$.

Voici quelques autres exemples:

– une solution fondamentale de l'équation de la chaleur $\partial_t u(x, y) - \Delta_x u(x, t) = f(x, t)$ est $G(x, t) = \frac{H(t)}{(4\pi t)^{d/2}} \exp\left(-\frac{|x|^2}{4t}\right)$.

– une solution fondamentale de $\bar{\partial}u(x, y) := \frac{1}{2}(\partial_x + i\partial_y)u(x, y) = f(x, y)$ est $G(x, y) = \frac{1}{x+iy}$. Notez que $G \in L^1_{loc}$.

**Pour les deux derniers $\langle \cdot, \cdot \rangle$, il s'agit du produit scalaire de \mathbb{R}^d .

APPENDIX A. APPENDICE: INTÉGRATION SUR LA SPHÈRE DE \mathbb{R}^d

Les coordonnées sphériques étendent les coordonnées polaire de la dimension 2.

On remarque que si $x \in \mathbb{R}^d$, $x \neq 0$, alors $x = r(\zeta_1, \dots, \zeta_d)$ avec $r = |x| = (x_1^2 + \dots + x_d^2)^{1/2}$ et $(\zeta_1^2 + \dots + \zeta_{d-1}^2) + \zeta_d^2 = 1$

Il existe donc $\theta_{d-1} \in [0, \pi]$ tel que $\zeta_d = \cos \theta_{d-1}$ et $\zeta_1^2 + \dots + \zeta_{d-1}^2 = \sin^2 \theta_{d-1}$. Soit cette quantité est nulle, soit on divise par $\sin^2 \theta_{d-1}$ et on a $((\zeta_1/\sin \theta_{d-1})^2 + \dots + (\zeta_{d-2}/\sin \theta_{d-1})^2) + (\zeta_{d-1}/\sin \theta_{d-1})^2 = 1$ Il existe ensuite $\theta_{d-2} \in [0, \pi]$ tel que $\zeta_{d-1}/\sin \theta_{d-1} = \cos \theta_{d-2}$ et $((\zeta_1/\sin \theta_{d-1})^2 + \dots + (\zeta_{d-2}/\sin \theta_{d-1})^2) = \sin^2 \theta_{d-2}$ i.e. $\zeta_{d-1} = \cos \theta_{d-2} \sin \theta_{d-1}$ et $\zeta_1^2 + \dots + \zeta_{d-2}^2 = (\sin \theta_{d-2} \sin \theta_{d-1})^2$. On continue ainsi jusqu'à $\zeta_1^2 + \zeta_2^2 = (\sin \theta_2 \dots \sin \theta_{d-1})^2$ et il existe alors $\theta_1 \in (-\pi, \pi)$ tel que $\zeta_1 = \sin \theta_1 \sin \theta_2 \dots \sin \theta_{d-1}$ et $\zeta_2 = \cos \theta_1 \sin \theta_2 \dots \sin \theta_{d-1}$. En résumé

$$\begin{cases} x_1 &= r \sin \theta_1 \sin \theta_2 \dots \sin \theta_{d-1} \\ x_2 &= r \cos \theta_1 \sin \theta_2 \dots \sin \theta_{d-1} \\ \vdots &= \vdots \\ x_{d-1} &= r \cos \theta_{d-2} \sin \theta_{d-1} \\ x_d &= r \cos \theta_{d-1} \end{cases}$$

avec $r \geq 0$, $\theta_1 \in (-\pi, \pi]$, et $\theta_j \in [0, \pi]$ pour $j = 2, \dots, d-1$. On notera que ceci donne une bijection Π , $\mathcal{C}^1(r, \theta_1, \dots, \theta_{d-1}) \rightarrow (x_1, \dots, x_d)$ de $]0, +\infty) \times (-\pi, \pi] \times [0, \pi]^2 \rightarrow \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$. Notez que si on fixe $r > 0$, l'image de $\{r\} \times (-\pi, \pi] \times [0, \pi]^2$ est la sphère $r\mathbb{S}^{d-1} = \{x \in \mathbb{R}^d : |x| = r\}$.

Pour $d = 2$ on retrouve bien sûr les coordonnées polaires et pour $d = 3$

$$\begin{cases} x &= r \sin \theta \sin \varphi \\ y &= r \sin \theta \cos \varphi \\ z &= r \cos \theta \end{cases} \quad r \geq 0, 0 \leq \theta \leq \pi, 0 \leq \varphi \leq 2\pi.$$

Par exemple, pour $d = 3$

$$\begin{pmatrix} \sin \theta \sin \varphi & r \cos \theta \sin \varphi & r \sin \theta \cos \varphi \\ \sin \theta \cos \varphi & r \cos \theta \cos \varphi & -r \sin \theta \sin \varphi \\ \cos \theta & -r \sin \theta & 0 \end{pmatrix}$$

dont le déterminant est (en développant par rapport à la dernière ligne)

$$\begin{aligned} J &= \cos \theta \begin{vmatrix} r \cos \theta \sin \varphi & r \sin \theta \cos \varphi \\ r \cos \theta \cos \varphi & -r \sin \theta \sin \varphi \end{vmatrix} + r \sin \theta \begin{vmatrix} \sin \theta \sin \varphi & r \sin \theta \cos \varphi \\ \sin \theta \cos \varphi & -r \sin \theta \sin \varphi \end{vmatrix} \\ &= r^2 \cos^2 \theta \sin \theta (-\sin^2 \varphi - \cos^2 \varphi) + r \sin^3 \theta (-\sin^2 \varphi - \cos^2 \varphi) \\ &= -r \sin \theta (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) = -r \sin \theta. \end{aligned}$$

En particulier si on écrit $\tilde{f}(r, \theta, \varphi) = f(r \sin \theta \sin \varphi, r \sin \theta \cos \varphi, r \cos \theta)$ i.e. f en coordonnées sphériques, alors

$$\int_{\mathbb{R}^d} f(x) dx = \int_0^{+\infty} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi f(r \sin \theta \sin \varphi, r \sin \theta \cos \varphi, r \cos \theta) r \sin \theta d\varphi d\theta dr.$$

Cela conduit naturellement à poser pour $\Psi : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{C}$,

$$\int_{\mathbb{S}^2} \Psi(\zeta) d\sigma_2(\zeta) = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \Psi(\sin \theta \sin \varphi, \sin \theta \cos \varphi, \cos \theta) r \sin \theta d\varphi d\theta$$

(avec un abus de notation).

Pour la dimension d , le calcul est similaire et on a

$$\int_{\mathbb{S}^{d-1}} \Psi(\zeta) d\sigma_{d-1}(\zeta) = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \cdots \int_0^\pi \Psi(\Theta) \prod_{j=2}^{d-1} \sin^{j-1} \theta_j d\theta_{d-1} \cdots d\theta_2 d\theta_1$$

où

$$\Theta = (\sin \theta_1 \sin \theta_2 \cdots \sin \theta_{d-1}, \cos \theta_1 \sin \theta_2 \cdots \sin \theta_{d-1}, \dots, \cos \theta_{d-1})$$

et alors

$$\int_{\mathbb{R}^d} f(x) dx = \int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{S}^{d-1}} f(r\zeta) d\sigma_{d-1}(\zeta) r^{d-1} dr.$$

En particulier, si f est radiale, $f(x) = f_0(|x|)$ alors

$$\int \mathbb{R}^d f(x) dx = \sigma_{d-1}(\mathbb{S}^{d-1}) \int_0^{+\infty} f_0(r) r^{d-1} dr.$$

Notons que ceci permet de relier le volume $|B_d(\rho)|$ le volume de la sphère (de centre 0) de \mathbb{R}^d de rayon ρ à la sphère puisque si $f = \mathbf{1}_{B_d(\rho)}$ alors $f_0 = \mathbf{1}_{[0,\rho]}$ donc

$$\begin{aligned} |B_d(\rho)| &= \int_{\mathbb{R}^d} \mathbf{1}_{B_d(\rho)}(x) dx = \sigma_{d-1}(\mathbb{S}^{d-1}) \int_0^{+\infty} \mathbf{1}_{[0,\rho]}(r) r^{d-1} dr \\ &= \sigma_{d-1}(\mathbb{S}^{d-1}) \int_0^\rho r^{d-1} dr = \frac{\sigma_{d-1}(\mathbb{S}^{d-1})}{d} \rho^d. \end{aligned}$$

Notons que ceci démontre aussi que $|B_d(\rho)| = |B_d(1)|\rho^d$. Par ailleurs, on remarque que si $x \in B_d(\rho)$ alors chaque coordonnées de x est $\leq \rho$. Ainsi

$$\begin{aligned} B_d(\rho) &= \{(x_1, \dots, x_{d-1}, x_d) : (x_1^2 + \cdots + x_{d-1}^2) + x_d^2 = \rho^2\} \\ &= \{(x_1, \dots, x_{d-1}, x_d) : (x_1^2 + \cdots + x_{d-1}^2) = \sqrt{\rho^2 - x_d^2}^2\} \\ &= \{(\bar{x}, x_d) : x_d \in [-\rho, \rho], \bar{x} \in B_{d-1}(\sqrt{\rho^2 - x_d^2})\}. \end{aligned}$$

En utilisant Fubini (on n'intègre que des quantités positives), on trouve alors

$$\begin{aligned} |B_d(\rho)| &= \int_{\mathbb{R}^d} \mathbf{1}_{B_d(\rho)}(x) dx = \int_{-\rho}^\rho \int_{\mathbb{R}^{d-1}} \mathbf{1}_{B_{d-1}(\sqrt{\rho^2 - x_d^2})}(\bar{x}) d\bar{x} dx_d \\ &= \int_{-\rho}^\rho |B_{d-1}(\sqrt{\rho^2 - x_d^2})| dx_d \\ &= |B_{d-1}(1)| \int_{-\rho}^\rho (\rho^2 - x_d^2)^{(d-1)/2} dx_d. \end{aligned}$$

On obtient donc la formule de récurrence

$$\begin{aligned} |B_d(1)| &= |B_{d-1}(1)| \int_{-1}^1 (1 - t^2)^{(d-1)/2} dt = 2|B_{d-1}(1)| \int_0^1 (1 - t^2)^{(d-1)/2} dt \\ &= |B_{d-1}(1)| \int_0^1 (1 - x)^{(d-1)/2} x^{-1/2} ds = \mathbf{B}\left(\frac{d+1}{2}, \frac{1}{2}\right) |B_{d-1}(1)| \end{aligned}$$

où on a fait un changement de variable $x = t^2$ et où

$$\mathbf{B}(s, t) = \int_0^1 x^{s-1}(1-x)^{t-1} dx, \quad \Re(s), \Re(t) > 0$$

est la fonction β . Celle-ci est reliée à la fonction Γ

$$\Gamma(s) = \int_0^{+\infty} t^s e^{-t} \frac{dt}{t}, \quad \Re(s) > 0$$

par

$$B(s, t) = \frac{\Gamma(s)\Gamma(t)}{\Gamma(s+t)}.$$

Cette dernière formule se démontre en écrivant $\Gamma(s)\Gamma(t)$ comme un intégrale double (avec Fubini) puis de faire le changement de variable $u = x + y$, $v = \frac{x}{x+y}$.

Ainsi

$$|B_d(1)| = B(d/2 + 1, 1/2)|B_{d-1}(1)| = \frac{\Gamma(\frac{d+1}{2})\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{d}{2} + 1)}|B_{d-1}(1)|.$$

Commençons par $d = 1$ où bien évidemment $|B_1(1)| = |[-1, 1]| = 2$. Par définition de π , $|B_2(1)| = \pi$ donc

$$\pi = 2 \frac{\Gamma(\frac{3}{2})\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(2)}.$$

Mais $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ (avec une intégration par parties) donc $\Gamma(3/2) = \Gamma(1/2)/2$ et $\Gamma(2) = \Gamma(1) = 1$ (par un calcul direct). Il en résulte que $\Gamma(1/2)^2 = \pi$ et comme $\Gamma(x) \geq 0$ quand $x > 0$, $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$.

En particulier, on a $|B_d(1)| = \sqrt{\pi} \frac{\Gamma(\frac{d+1}{2})}{\Gamma(\frac{d}{2} + 1)}|B_{d-1}(1)|$ et, en itérant cette formule, pour $d \geq 3$

$$|B_d(1)| = \pi \frac{\Gamma(\frac{d+1}{2})}{\Gamma(\frac{d}{2} + 1)} \frac{\Gamma(\frac{d}{2})}{\Gamma(\frac{d+1}{2})} |B_{d-2}(1)| \frac{2\pi}{d} |B_{d-2}(1)|.$$

Partant de là, on obtient immédiatement, en séparant les cas d pair et d impair

$$|B_d(1)| = \frac{\pi^{d/2}}{\Gamma(\frac{d}{2} + 1)} = \begin{cases} \frac{\pi^p}{p!} & \text{si } d = 2p \\ \frac{2(4\pi)^p p!}{(2p+1)!} & \text{si } d = 2p + 1 \end{cases}$$

et

$$\sigma_{d-1}(\mathbb{S}^{d-1}) = d|B_d(1)| = \frac{d\pi^{d/2}}{\Gamma(\frac{d}{2} + 1)}.$$

UNIV. BORDEAUX, IMB, UMR 5251, F-33400 TALENCE, FRANCE. CNRS, IMB, UMR 5251, F-33400 TALENCE, FRANCE.

Email address: Philippe.Jaming@math.u-bordeaux.fr