Chapitre 11. Chaînes et connexité

11.1 Chaînes

Exercice 11.1.1 Soit le graphe suivant : [...]

11.2 Démonstration par récurrence

Exercice 11.2.1 Soit Γ une chaîne d'extrémités s et t. On suppose que Γ *n'est pas* élémentaire.

1. Montrer que Γ contient un cycle de longueur non nulle.
2. En déduire qu'il existe une chaîne de longueur strictement plus petite que celle de Γ, qui relie s et t.
3. En déduire par récurrence sur le nombre de cycles inclus de longueur non nulle que pour toute chaîne Γ formant un chemin de s à t, il existe une chaîne *élémentaire* formant un chemin de s à t.

Schéma de solution 10
On peut bien sûr faire un dessin pour comprendre ce qui se passe. Mais pour réellement démontrer il faut passer par le formalisme pour ne pas risquer de rater des cas particuliers :

1. On note $\Gamma = [s_0, a_1, s_1, a_2, s_2, \dots a_n, s_n]$, avec notamment $s_0 = s$ et $s_n = t$.

   Γ n'étant pas élémentaire, la définition nous donne :

   $$\begin{aligned} &\exists\ 0 \leq i < j \leq n, s_i = s_j \text{ et } \{i, j\} \neq \{0, n\} \\ &\text{ou } \exists\ 1 \leq i < j \leq n, a_i = a_j \end{aligned}$$

   Dans le premier cas, on pose $i' = i$ et

   $$\Gamma' = [s_i, a_{i+1}, s_{i+1}, a_{i+2}, \dots a_j, s_j]$$

   qui est une chaîne incluse dans Γ. Puisque $s_i = s_j$, c'est même un cycle. Puisque $i < j$, il y a au moins l'arête a_{i+1} dans Γ', Γ' n'est donc pas de longueur nulle.

   Dans le deuxième cas, puisque $a_i = a_j$, on a soit $s_i = s_j$ (l'arête est utilisée dans le même sens) et on se ramène en fait au premier cas. Ou sinon on a $s_{i-1} = s_j$ (l'arête est utilisée dans des sens inverses). On peut alors poser $i' = i - 1$ et

   $$\Gamma' = [s_{i-1}, a_i, s_i, a_{i+1}, \dots a_j, s_j]$$

   qui est inclus dans Γ, et contient au moins l'arête a_i et donc n'est pas de longueur nulle.

   Dans tous les cas $s_{i'} = s_j$.

2. Puisque $s_{i'} = s_j$, on retire de Γ le cycle Γ' en posant :

   $$\Gamma_2 = [s_0, a_1, s_1, \dots s_{i'-1}, a_{i'}, s_{i'}, a_{j+1}, s_{j+1}, a_{j+2}, \dots a_n, s_n]$$

   C'est bien une chaîne de s à t. Γ' est de longueur non nulle, donc Γ_2 contient strictement moins d'arêtes que Γ, elle est donc de longueur strictement plus petite.

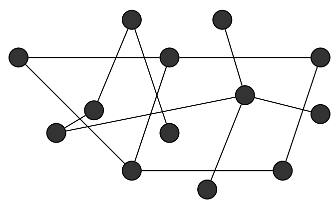
3. **Cas de base :** soit Γ une chaîne de s à t ne contenant pas de cycle de longueur non nulle. Elle est nécessairement élémentaire, puisque sinon d'après 1. elle contiendrait un cycle.

   Récurrence : supposons la propriété vraie pour toute chaîne contenant au plus n cycles de longueur non nulle.

   Soit une chaîne Γ de s à t contenant $n+1$ cycles de longueur non nulle. Grâce à 2., il existe une chaîne Γ_2 de s à t contenant au moins un cycle de longueur non nulle de moins que Γ, donc contenant au plus n tels cycles. En utilisant l'hypothèse de récurrence sur Γ_2, il existe une chaîne élémentaire formant un chemin de s à t.

11.3 Connexité

Exercice 11.3.1 Le graphe suivant est-il connexe ?



Le graphe du TGV (page **??**) est-il connexe ?

Schéma de solution 11
Non, non.

Exercice 11.3.2 Indiquer si les propositions suivantes sont vraies ou fausses en justifiant votre réponse (rappel : un sommet isolé est un sommet de degré zéro) :

1. Si un graphe n'a pas de sommet isolé, alors il est connexe.
2. Si un graphe possède un sommet isolé, alors il n'est pas connexe.
3. Pour qu'un graphe à plusieurs sommets soit connexe il est nécessaire que tous ses sommets soient de degré supérieur ou égal à 1.

Schéma de solution 12
1. Non, cf le graphe ci-dessus.
2. Non : le graphe réduit à un seul sommet sans arête est connexe.
3. Oui. S'il avait plusieurs sommets mais qu'il existait un sommet isolé, il ne pourrait pas y avoir de chaîne de ce sommet à un autre des sommets du graphe.

Exercice 11.3.3

1. La proposition suivante :

   > *« un graphe est connexe si et seulement si il existe un sommet s_0 qui peut être relié (par des chaînes) à tous les autres sommets »*

   est-elle vraie ? Justifier ou donner un contre-exemple.
2. Même question pour la proposition suivante :

« un graphe est connexe si et seulement si il existe une chaîne passant (au moins une fois) par chaque sommet du graphe ».

Schéma de solution 13

1. De gauche à droite : soit G un graphe connexe. Soit s_0 un sommet quelconque. Par définition de la connexité de G, pour n'importe quel sommet t il existe une chaîne de s_0 à t.

   De droite à gauche. Soit G un graphe tel qu'il existe un sommet s_0 qui peut être relié par des chaînes à tous les autres sommets. Soit s et t deux sommets. Il existe une chaîne Γ_s de s_0 à s, et il existe une chaîne Γ_t de s_0 à t. On recolle les deux chaînes Γ_s et Γ_t l'une à l'autre en retournant Γ_s : on pose $\Gamma = \overline{\Gamma_s} + \Gamma_t$. C'est bien une chaîne de s à t, G est donc connexe.

2. De gauche à droite : soit G un graphe connexe. Notons $S(G) = \{s_0, s_1, \ldots, s_n\}$. G étant connexe, il existe une chaîne Γ_1 de s_0 à s_1, une chaîne Γ_2 de s_1 à s_2, etc. jusqu'à Γ_n de s_{n-1} à s_n.

   On peut recoller ces chaînes en posant : $\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2 + \ldots + \Gamma_n$. C'est bien une chaîne passant (au moins une fois) par chaque sommet du graphe.

   De droite à gauche : soit G ayant une chaîne Γ passant par chaque sommet du graphe. Notons $\Gamma = [s_0, a_1, s_1, a_2, \ldots, a_n, s_n]$. Soit s et t deux sommets. Γ passe par chaque sommet du graphe donc notamment par s et t, donc il existe i et j tels que $s = s_i$ et $t = s_j$. Supposons par exemple $i \leq j$ (la suite est similaire dans l'autre cas). On pose

   $$\Gamma_2 = [s_i, a_{i+1}, s_{i+1}, a_{i+2}, \ldots, a_j, s_j]$$

   C'est bien une chaîne de s à t, G est donc connexe.