Master Mathématiques et Applications
Espaces L^p, Distributions

Université de Bordeaux
2023-24

Révisions

Exercice 1. On considère $E = \mathcal{C}_c(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions continues à support compact sur $\mathbb{R}$. Pour $f \in E$, on définit

$$\|f\|_1 = \int_{\mathbb{R}} |f(t)|dt,\ \|f\|_2 = \left(\int_{\mathbb{R}} |f(t)|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}},\ \|f\|_\infty = \sup_{\mathbb{R}} |f(t)|.$$

Monter que ce sont bien des normes sur E. Montrer qu'elles ne sont pas comparables. Qu'en est-il lorsque l'on remplace $\mathbb{R}$ par $I = [0, 1]$.?

Exercice 2. Soit $E = \mathcal{C}([0, 2], \mathbb{R})$ muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$. On considère l'application linéaire $T : E \to \mathbb{R}$ définie par

$$T(f) = \int_0^1 f(u)du - \int_1^2 f(u)du.$$

Montrer que $\|T\| = 2$ mais que cette norme n'est pas atteinte.

Exercice 3. Soit (X, d) un espace métrique complet et $(x_n)_{n\geq 0}$ une suite de X.

1) Montrer que si $\sum_{n\geq 0} d(x_n, x_{n+1}) < +\infty$, alors $(x_n)_n$ est de Cauchy.

2) La réciproque est-elle vraie?

3) Montrer que si $(x_n)_n$ est de Cauchy, on peut extraire une sous-suite $(x_{n_k})_{k\geq 0}$ telle que $\sum_{n\geq 0} d(x_{n_k}, x_{n_{k+1}}) < +\infty$.

4) En déduire qu' un espace vectoriel normé est complet si et seulement si toute série absolument convergente est convergente.

Exercice 4. 1) Montrer que $\mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$ muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$ est complet.

2) Montrer que $\mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$ muni de la norme $\|\cdot\|_1$ n'est pas complet.

Exercice 5. 1) Montrer que $\mathcal{C}^1([0, 1], \mathbb{R})$ muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$ n'est pas complet.

2) Montrer que $\mathcal{C}^1([0, 1], \mathbb{R})$ muni de la norme $N(f) = \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty$ est complet.

Exercice 6. On note $\ell_1(\mathbb{N})$ l'espace des suites $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que $\|u\|_1 := \sum_{n\in\mathbb{N}} |u_n| < \infty$. Montrer que $(\ell_1(\mathbb{N}), \|.\|_1)$ est un espace de Banach.

Exercice 7. On note $h^1(\mathbb{N})$ l'ensemble des suites $u \in \ell^2(\mathbb{N})$ telles que $\sum_{n\in\mathbb{N}} n^2|u_n|^2 < \infty$. Montrer que

$$\langle u, v\rangle_{h^1} = \sum_{n\in\mathbb{N}} n^2 u_n \overline{v_n}$$

définit un produit scalaire sur pour lequel $h^1(\mathbb{N})$ est un espace de Hilbert.

Exercice 8. Soit E un espace de Banach et u un endomorphisme continu de E .

1)On suppose que $\|u\|_{E\to E} < 1$. Montrer que $Id - u$ est inversible.

2) En déduire que $GL(E)$ est ouvert.

Exercice 9. (Théorème de représentation de Riesz) Soit H un espace de Hilbert. Montrer que pour toute forme linéaire continue ℓ sur H, il existe un vecteur y (unique) tel que $\ell(\cdot) = \langle \cdot, y\rangle$.

Exercice 10. 1) Proposer une suite de fonctions continues $(f_n)_n$ sur $[0, 1]$ qui converge simplement vers une fonction continue f sur $[0, 1]$ mais telle que

$$\int_0^1 f_n(t)dt \text{ ne converge pas vers } \int_0^1 f(t)dt.$$

2) Qu'en est-il si on suppose que $(f_n)_n$ converge uniformément vers 0?

Exercice 11. Soit $I_n = \int_0^\infty e^{-t^n} dt$. Justifier que cette intégrale est bien définie et que la suite (I_n) admet une une limite que l'on calculera lorsque $n \to \infty$

Exercice 12. Montrer que $\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \sqrt{2\pi}$.

Exercice 13. (Transformée de Fourier de la Gaussienne). On définit pour $\xi \in \mathbb{R}$,

$$\phi(\xi) = \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{x^2}{2}} e^{-ix\xi}\, dx.$$

1) Montrer que ϕ est bien définie et que ϕ est continue sur $\mathbb{R}$.

2) Montrer que ϕ est dérivable, puis par intégration par parties, montrer ϕ vérifie une équation différentielle du premier ordre.

3) Résoudre cette équation différentielle puis donner la valeur de $\phi(\xi)$.

Exercice 14. (Coordonnées polaires dans $\mathbb{R}^3$)

Soient $U = \{(r, \varphi, \theta),\ 0 < r < \infty,\ -\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2},\ 0 < \theta < 2\pi$ et $V = \mathbb{R}^3 \setminus \{(x, 0, z),\ x \geq 0,\ z \in \mathbb{R}\}$ et soit $\phi : U \to V$ définie par

$$\Phi(r, \varphi, \theta) = (r\cos\theta\cos\varphi, r\sin\theta\cos\varphi, r\sin\varphi)$$

1) Montrer que Φ est un C^1 diffeomorphisme et que $J\Phi(r, \varphi, \theta) = r^2\cos\varphi$.

2) Pour $\alpha \in \mathbb{R}$ on définit

$$f_\alpha(x, y, z) = (x^2 + y^2 + z^2)^{\alpha/2}$$

sur $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$. Montrer que f_α est intégrable sur $B(0, 1)$ ssi $\alpha > -3$ et que f_α est intégrable sur $\mathbb{R}^3 \setminus B(0, 1)$ ssi $\alpha < -3$.

3) Généralisation à $\mathbb{R}^d$, $d \geq 3$?