Espaces L^p

Exercice 1 *Soit* $(\Omega, \mathcal{B}, \mu)$ *un espace mesuré. Montrer que pour tout* $f \in L^p$*, il existe* $C > 0$ *tel que*

$$\forall \lambda > 0,\ \mu(\{|f| \geq \lambda\}) \leq C\lambda^{-p}$$

Exercice 2 *Soit* $(\Omega, \mathcal{B}, \mu)$ *un espace mesuré.*

1. *Montrer que pour tout* $1 \leq p \leq q \leq \infty$*, on a* $L^p \cap L^\infty \subset L^q$.
2. *Soient* $1 < p < +\infty$ *et* $f \in L^p \cap L^\infty$*, montrer que* $\lim_{q \to +\infty} \|f\|_q = \|f\|_\infty$.

Exercice 3 *Soit* $p \in [1, \infty]$*. Soit* $(\Omega, \mathcal{B}, \mu)$ *un espace mesuré. Soit* $A \in \mathcal{B}$*. On considère*

$$F = \{f \in L^p(E, \mathcal{B}, \mu), f = 0\ \mu \text{ p.p. sur } A\}.$$

Montrer que F *est un fermé de* $L^p(\Omega, \mathcal{B}, \mu)$.

Exercice 4 *Soit* $(\Omega, \mathcal{B}, \mu)$ *un espace mesuré et soient* $1 \leq p, q, r < \infty$.

1. *On suppose que* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r}$*. Montrer que pour tout* $f \in L^p$ *et* $g \in L^q$*, on a* $fg \in L^r$ *et*
$$\|fg\|_r \leq \|f\|_p \|g\|_q. \tag{1}$$
2. *On suppose que* $\Omega = \mathbb{R}$ *et pour tout* $\lambda > 0$ *on note* $f_\lambda(x) = f(\lambda x)$.
   (a) *Exprimer* $\|f_\lambda\|_p$ *en fonction de* λ *et* $\|f\|_p$
   (b) *Montrer que si* $p, q, r \geq 1$ *sont tels que* (1) *est satisfaite, alors* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r}$.

Exercice 5 *Soit* $(\Omega, \mathcal{B}, \mu)$ *un espace mesuré et soient* $1 \leq p_1, \ldots, p_n \leq \infty$ *tels que* $\sum_{i=1}^n \frac{1}{p_i} = 1$*. On suppose que pour tout* $i = 1, \ldots, n$*,* $f_i \in L^{p_i}$*. Montrer que* $f := \prod_{i=1}^n f_{p_i}$ *est intégrable et que*

$$\|f\|_1 \leq \prod_{i=1}^n \|f_i\|_{p_i}.$$

Exercice 6 *Soit* $p \in [1, \infty)$*. On considère le sous ensemble* C *de* $L^p(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ *défini par :*

$$C = \{f \in L^p(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda), f \geq 0 \text{ p.p.}\}.$$

Montrer que C *est d'intérieur vide. Qu'en est-il pour* $p = +\infty$ *?*

Exercice 7 *(Lemme de Riemann-Lebesgue). Soit* f *une fonction intégrable sur un intervalle* I *de* $\mathbb{R}$*. Montrer que*

$$\int_I f(t) e^{i\lambda t} dt \underset{\lambda \to +\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Indication : On pourra utiliser un argument de densité.

Exercice 8 *Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ un espace mesuré et soit f une fonction mesurable sur Ω. On suppose que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $f_n \in L^\infty$ et $g_n \in L^1$ telles que $f = f_n + g_n$ et $\|f_n\|_\infty \le 1$, $\|g_n\|_1 \le \frac{1}{n}$. Montrer que $f \in L^\infty$ et que $\|f\|_\infty \le 1$.*

Exercice 9 *Soit $J : \ell^1(\mathbb{N}) \to \ell^\infty(\mathbb{N})'$ l'application linéaire définie par $J(u)(v) = \sum_{n\in\mathbb{N}} u_n v_n$ pour tout $u \in \ell^1, v \in \ell^\infty$.*

1. *Montrer que J est linéaire continue et injective*
2. *On considère l'espace c_0 des suites admettant une limite en $+\infty$. Montrer que c_0 est un sous espace fermé de ℓ^∞*
3. *On considère $\varphi : c_0 \to \mathbb{C}$ définie par $\varphi(x) = \lim_{n\to+\infty} x_n$. Montrer que φ est continue.*
4. *On admet que φ se prolonge en une forme linéaire continue sur ℓ^∞. Montrer que J n'est pas surjective.*

Exercice 10

1. *Soit $1 \le p < \infty$. Montrer que $\ell^p(\mathbb{N})$ est séparable*
2. *Monter que $\ell^\infty(\mathbb{N})$ n'est pas séparable*

Exercice 11 *Soit $1 < p \le 2$, soit p' son exposant conjugué à ($\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$) et soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^d$ muni de la mesure de Lebesgue. On considère l'application $J : L^{p'}(\Omega) \to L^p(\Omega)'$ définie par*

$$J(f)(g) = \int_\Omega fg$$

pour tout $f \in L^{p'}, g \in L^p$. Le but de cet exercice est de montrer que J est une isométrie surjective.

1. *Montrer que J est linéaire continue et que $|||J||| \le 1$.*
2. *Pour tout $f \in L^{p'}$, montrer que $g := |f|^{p'-2}\overline{f}$ appartient à L^p. En déduire que $\|J(f)\|_{(L^p)'} = \|f\|_{p'}$.*
3. *On suppose que $p = 2$. Démontrer que J est surjective dans ce cas.*
4. *On suppose désormais que $1 < p < 2$ et on se donne $\varphi \in (L^p)'$.*
   (a) *On suppose que $\mu(\Omega)$ est fini*
      i. *Rappeler pourquoi il existe $C > 0$ tel que $\|f\|_p \le C\|f\|_2$ pour tout $f \in L^2$. On notera* $\mathbf{i}$ *l'injection continue de L^2 dans L^p.*
      ii. *Montrer qu'il existe $g \in L^2$ telle que $\varphi(\mathbf{i}(f)) = \int_\Omega fg$ pour tout $f \in L^2$*
      iii. *On considère la suite de fonctions $f_n = \overline{g}|g|^{p'-2}1_{\{|g|\le n\}}$. Montrer que $f_n \in L^2$ pour tout n et en calculant $\varphi(f_n)$, montrer que*

$$\int_\Omega |g|^{p'} 1_{\{|g|\le n\}} \le \|\varphi\|^{p'}_{L^p\to\mathbb{C}}$$

      iv. *Montrer que $g \in L^{p'}$ et conclure.*
   (b) *On s'intéresse maintenant au ca où Ω n'est pas nécessairement de mesure finie. On note $r = \frac{2p}{2-p}$.*
      i. *Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $A_n = \{x \in \Omega,\ n \le |x| < n+1\}$. Montrer qu'on peut choisir des nombres $\alpha_n > 0$ tels que $w := \sum_{n\in\mathbb{N}} \alpha_n 1_{A_n}$ appartienne à $L^r(\Omega)$*
      ii. *Montrer que l'application $\psi(f) = \varphi(fw)$ définit une forme linéaire sur L^2.*
      iii. *Montrer qu'il existe $G \in L^2$ telle que pour tout $f \in L^p$ telle que $\frac{f}{w} \in L^2$, on a $\varphi(f) = \int f\frac{G}{w}$*
      iv. *Montrer que $g = \frac{G}{w} \in L^{p'}$ et terminer la preuve.*

Exercice 12 *Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ un espace mesuré et $p \in [1, +\infty]$. On se donne une suite (f_n) de fonctions de $L^p(\mu)$ et on suppose qu'il existe $f \in L^p(\mu)$ telle que $f_n \to f$ μ-pp et $\|f_n\|_p \to \|f\|_p$.*

1. *En utilisant la convéxité de la fonction $t \mapsto |t|^p$, montrer que la fonction $\varphi_n = 2^{p-1}(|f_n|^p + |f|^p) - |f - f_n|^p$ vérifie*

$$\varphi_n \ge 0,\ \mu - pp.$$

2. *En appliquant le Lemme de Fatou à φ_n, montrer que $f_n \to f$ dans L^p .*