

Convolution

Exercice 1 Soient $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ tels que $d - c < b - a$, $f = \mathbf{1}_{[a,b]}$ et $g = \mathbf{1}_{[c,d]}$. Calculer $f * g$.

Exercice 2 Soient $a, b > 0$. Calculer $f_a * f_b$ où $f_a(x) = e^{-ax^2}$ pour $x \in \mathbb{R}$.

Exercice 3 Pour toute fonction $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$, on définit le support de f par

$$\text{supp}(f) = \overline{\{x \in \mathbb{R}^d, f(x) \neq 0\}}.$$

On note $C_c(\mathbb{R}^d)$ l'espace des fonctions continues à support compact. Montrer que si $f, g \in C_c(\mathbb{R}^d)$ alors $f * g \in C_c(\mathbb{R}^d)$ et $\text{supp}(f * g) \subset \text{supp}(f) + \text{supp}(g)$.

Exercice 4 Soient $a \in \mathbb{R}$, $g = \mathbf{1}_{[0,+\infty[}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n \geq a$, $f_n = \mathbf{1}_{[a,n]}$. Calculer $f_n * g$. Etudier $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n * g(x)$ pour $x \in \mathbb{R}$. Mêmes questions en remplaçant f_n par $h_n = \mathbf{1}_{[-n,a]}$, $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 5 Soient $f, g \in C_c(\mathbb{R}^d)$ et $h \in L^1(\mathbb{R}^d)$. Montrer que

$$(f * g) * h = f * (g * h).$$

Exercice 6 Soit $\rho \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ une fonction positive telle que $\int_{\mathbb{R}^d} \rho = 1$. Pour $h > 0$, on pose $\rho_h(x) = h^{-d} \rho(\frac{x}{h})$. Le but de cet exercice est de montrer que pour tout $f \in L^p$, $1 \leq p < \infty$, on a $\rho_h * f \rightarrow f$ dans L^p quand $h \rightarrow 0$.

1. Montrer que pour tout $h > 0$, on a

$$\rho_h * f(x) - f(x) = \int_{\mathbb{R}^d} \rho_h(y) (f(x-y) - f(x)) dy.$$

2. Montrer que pour tout $\delta > 0$, on a $\lim_{h \rightarrow 0} \int_{|x| \geq \delta} \rho_h(x) dx = 0$.
3. Montrer que $\lim_{h \rightarrow 0} \|\rho_h * f - f\|_p = 0$
4. Montrer que $C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ est dense dans L^p .

Exercice 7 Soit $p, q \in [1, \infty]$ deux exposants conjugués : $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ et $f \in L^p(\mathbb{R})$, $g \in L^q(\mathbb{R})$.

1. Montrer que la fonction $f * g$ est bien définie, vérifie

$$\|f * g\|_\infty \leq \|f\|_p \|g\|_q$$

et que c'est une fonction uniformément continue.

2. Montrer de plus, que si $1 < p < +\infty$ alors $\lim_{|x| \rightarrow +\infty} f * g(x) = 0$.

3. Que se passe-t-il pour $p = 1$ et $q = +\infty$?

Exercice 8 Soient $p, q, r > 0$. On suppose qu'il existe $C > 0$ tel que pour toutes fonctions f et g continues à support compact on a

$$\|f * g\|_r \leq C \|f\|_p \|g\|_q.$$

En considérant des fonctions de la forme $f_\lambda(x) = f(\lambda x)$ avec $\lambda > 0$, montrer qu'on a nécessairement $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 + \frac{1}{r}$.

Exercice 9 Le but de cette exercice est de démontrer l'inégalité de Young. On suppose que $1 \leq p, q, r \leq +\infty$ sont tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 + \frac{1}{r}$. On veut montrer que pour tout $f, g \in C_c(\mathbb{R}^d)$, on a

$$\|f * g\|_r \leq \|f\|_p \|g\|_q. \quad (1)$$

1. On suppose $r = 1$. Montrer que $p = q = 1$ et démontrer (1).

2. On suppose que $r = +\infty$. Démontrer (1).

3. On suppose désormais que $1 < r < \infty$.

(a) On suppose que $p = 1$. En appliquant l'inégalité de Holder aux fonctions $y \mapsto |f(x-y)|^{\frac{q-1}{q}}$ et $y \mapsto |f(x-y)|^{\frac{1}{q}} |g(y)|$, montrer que

$$\int |f(x-y)g(y)| dy \leq \|f\|_1^{1-\frac{1}{q}} \left(\int |f(x-y)| |g(y)|^q dy \right)^{\frac{1}{q}}$$

En déduire que $f * g \in L^q$ et que (1) est valide.

(b) On suppose maintenant que $1 < p, q < \infty$.

i. Montrer que pour tout $x, y \in \mathbb{R}^d$, on a

$$|f(x-y)g(y)| = |f(x-y)|^{\frac{p}{r}} |g(y)|^{\frac{q}{r}} \times |f(x-y)|^{\frac{r-p}{r}} \times |g(y)|^{\frac{r-q}{r}}.$$

ii. En appliquant l'inégalité de Holder à trois termes aux fonctions ci-dessus, montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^d$, on a

$$\left(\int |f(x-y)g(y)| dy \right)^r \leq (|f|^p * |g|^q)(x) \|f\|_p^{r-p} \|g\|_q^{r-q}$$

iii. Conclure à l'aide de la question 1).