# LP_ Fourier - Distribution

## I Rappels

### I.1 Espaces de Banach

1 **Définition** Un espace vectoriel $E$ muni d'une norme $\|\cdot\|$ et complet pour la métrique associée est appelé espace de Banach. $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$

**Rappel** $(E, \|\cdot\|)$ de dimension finie :
1) $E$ complet.
2) les normes sont équivalentes
3) les fermés-bornés sont les compacts

2 **Définition** Un espace métrique $(E, d)$ est dit complet si toute suite de Cauchy est convergente.

**Rem** Toute suite de Cauchy est bornée.

3 **Définition** Une norme est une application $\|\cdot\| : E \to \mathbb{R}^+$ vérifiant

1) $\|x\| = 0 \iff x = 0$
2) $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$
3) $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \ \|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$

4 **Exemples**

1) $\mathbb{K}^n$ muni d'une des normes

$$\|x\|_\infty = \sup_{1 \leq k \leq n} |x_k|$$

$$\|x\|_p = \left[ \sum_{k=1}^{n} |x_k|^p \right]^{\frac{1}{p}} \quad \forall p \geq 1$$

(on reviendra sur la preuve de l'inégalité triangulaire et de la complétude).

2) $c_0 = \{ (x_k)_{k \geq 0} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} ; \lim_{k \to +\infty} x_k = 0 \}$

muni de la norme

$$\|(x_k)_{k\geq 0}\|_\infty = \sup_{k\geq 0} |x_k|.$$

3) $\ell_p = \{ (x_k)_{k\geq 0} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} ; \sum_{k\geq 0} |x_k|^p < +\infty \}$

muni de la norme

$$\|(x_k)_{k\geq 0}\|_p = \left[ \sum_{k\geq 0} |x_k|^p \right]^{\frac{1}{p}}$$

(on verra bientôt que c'est une norme).

4) $\mathcal{C}_b^0(\mathbb{R}^d, \mathbb{K})$ = l'ensemble des fonctions bornées continues muni de la norme du sup
de la norme du sup.

$$\|f\|_\infty = \sup_{x\in\mathbb{R}^d} |f(x)|$$

5) $\mathcal{C}_b^r(\mathbb{R}^d, \mathbb{K})$ l'ensemble des fonctions $r$ fois différentiables et de différentielle $D^r f$ bornée continue, muni de la norme

$$\|f\|_r = \sup_{|\alpha|\leq r} \sup_{x\in\mathbb{R}^d} |D^\alpha f(x)|$$

où $\alpha = (\alpha_1 - \alpha_d)$, $|\alpha| = \sum_{i=1}^d \alpha_i$, et

$$D^\alpha f = \left( \frac{\partial^{\alpha_1}}{\partial x_1^{\alpha_1}} \frac{\partial^{\alpha_2}}{\partial x_2^{\alpha_2}} \cdots \frac{\partial^{\alpha_d}}{\partial x_d^{\alpha_d}} \right) f$$

**Remarque** Dans tous les exemples, il y a deux difficultés : montrer qu'on a bien une norme, montrer que l'espace vectoriel est complet.

6. Proposition $\mathcal{C}_b^0(\mathbb{R}^d, \mathbb{K})$ est un espace de Banach

preuve Soit $(f_n)_{n\geq 0}$ une suite de Cauchy. Alors pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, $(f_n(x))_{n\geq 0}$ est une suite de Cauchy et donc converge car $\mathbb{K}$ est complet. Soit

$$f(x) = \lim_{n\to+\infty} f_n(x)$$

Par definition des suites de Cauchy : soit $\varepsilon > 0$

$$\exists N \quad \forall m \geq N \ \forall k \geq 0 \quad \| f_m - f_{m+k} \|_\infty < \varepsilon$$

On fixe $N$, $m \geq N$. Alors

$$\forall x \in \mathbb{R}^d \quad \forall k \geq 0 \quad | f_m(x) - f_{m+k}(x) | < \varepsilon$$

En faisant tendre $k \to +\infty$

$$\forall x \in \mathbb{R}^d \qquad | f_m(x) - f(x) | \leq \varepsilon$$

$$\| f_m - f \|_\infty \leq \varepsilon$$

on vient de montrer que $(f_n)_{n\geq 0}$ converge uniformément vers $f$. On sait qu'alors $f$ est continue (A faire)

Toute suite de Cauchy est convergente.

7. Rappel Soit $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ une partie quelconque et $(f_n)_{n\geq 0}$ une suite de fonctions $f_n : \Omega \to \mathbb{K}$.

1) on dit que $(f_n)_{n\geq 0}$ converge simplement vers $f$ si

$$\forall x \in \Omega \ \forall \varepsilon \ \exists N \ \forall m \geq N \quad | f_n(x) - f(x) | < \varepsilon$$

2) on dit que $(f_n)_{n\geq 0}$ converge uniformément vers $f$ si

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \ \forall m \geq N \ \forall x \in \Omega \quad | f_n(x) - f(x) | < \varepsilon.$$

8. Proposition $c_0$ et $\ell^p$ sont des espaces de Banach.

preuve la preuve pour $c_0$ ressemble à $\mathcal{C}^0(\mathbb{R}^d, \mathbb{K})$.

La preuve pour $\ell^p$, $p \in [1, +\infty[$ necessite

# L'inégalité de Hölder et celle de Minkowski

## 1 Propositions

1) $\forall p \in [1, +\infty[$, $\forall (a_n)_{n\geq 0}, (b_n)_{n\geq 0} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$,

Hölder : $\left| \sum_{n\geq 0} a_n b_n \right| \leq \left[ \sum |a_n|^p \right]^{\frac{1}{p}} \left[ \sum |b_n|^q \right]^{\frac{1}{q}}$

Minkowski : $\left[ \sum_{n\geq 0} |a_n + b_n|^p \right]^{\frac{1}{p}} \leq \left[ \sum_{n\geq 0} |a_n|^p \right]^{\frac{1}{p}} + \left[ \sum_{n\geq 0} |b_n|^p \right]^{\frac{1}{p}}$

2) $\ell^p$ (resp. $\ell^\infty$) muni de la norme $\|\cdot\|_p$ (resp. $\|\cdot\|_\infty$) est un espace de Banach.

$\ell^\infty$, muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$ est un espace de Banach.

preuve 1) Hölder. On peut supposer $a_n \geq 0$, $b_n \geq 0$, et la somme est la somme $\sum_{k=0}^N$ est finie.

On pose $b'_n = \frac{b_n}{\|b\|_q}$ $\quad b = (b_k)_{k=0}^N$, $b' = (b'_k)_{k=0}^N$

$\|b\|_p = \left[ \sum_{k=0}^N b_k^q \right]^{\frac{1}{q}}$ Alors $\|b'\|_q = 1$

on cherche donc à montrer

$$\left[ \sum_{k=0}^N a_k b'_k \right]^p \leq \sum_{k=0}^N a_k^p.$$

Cela fait penser à une inégalité de convexité.

$u \longmapsto u^p$ est une fonction convexe pour $p \geq 1$

D'où

$$\left[ \sum_{k=0}^N a_k \alpha_k \right]^p \leq \sum_{k=0}^N \alpha_k a_k^p$$

pour tout $\alpha_k \geq 0$ vérifiant $\sum_{k=0}^N \alpha_k = 1$

Par hypothèse : $\sum_{k=0}^N (b'_k)^q = 1$.

$$\left[ \sum_{k=0}^N a_k b'_k \right]^p = \left[ \sum_{k=0}^N \frac{a_k}{(b'_k)^{q-1}} (b'_k)^q \right]^p$$

$$\leq \sum_{k=0}^{N} \left(\frac{a_k}{(b'_k)^{q-1}}\right)^p (b'_k)^q$$

On prend maintenant $q$ la quantité conjuguée

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1 \implies \frac{q}{p}=q-1 \implies q=p(q-1)$$

D'où $\left[\sum_{k=0}^{N} a_k b'_k\right]^p \leq \sum_{k=0}^{N} a_k^p$.

2) Minkowski : On pose $\alpha=\|a\|$, $\beta=\|b\|$.

$$\sum_{k=0}^{N}(a_k+b_k)^p = \sum_{k=0}^{N} (\alpha+\beta)^p\left(\frac{\alpha}{\alpha+\beta}\frac{a_k}{\alpha}+\frac{\beta}{\alpha+\beta}\frac{b_k}{\beta}\right)^p$$

$$\leq (\alpha+\beta)^p \sum_{k=0}^{N} \frac{\alpha}{\alpha+\beta}\left(\frac{a_k}{\alpha}\right)^p+\frac{\beta}{\alpha+\beta}\left(\frac{b_k}{\beta}\right)^p$$

$$=(\alpha+\beta)^p.$$

3) $\ell^p$ ($p\in[1,+\infty[$) est un espace de Banach.

Soit $x^{(n)}=(x_k^{(n)})_{k\geq 0}$ une suite de Cauchy.

$$\forall \varepsilon>0\ \exists N\ \forall n\geq N\ \forall m$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}|x_k^{(n)}-x_k^{(n+m)}|^p \leq \varepsilon^p$$

Alors pour $k$ fixé, $(x_k^{(n)})_{n\geq 0}$ est de Cauchy. donc converge vers $x_k^{(\infty)}$. Soit $x^{\infty}=(x_k^{\infty})_{k\geq 0}$.
On montre d'abord que $x^{\infty}\in\ell^p$. La suite de Cauchy étant bornée.

$$\exists K\ \forall n\geq 0\ \ \|a^{(n)}\|_p \leq K.$$

$$\forall N\ \forall n\geq 0\ \ \sum_{k=0}^{N}|a_k^{(n)}|^p \leq K^p.$$

En faisant tendre $n\to+\infty$ on obtient

$\forall N \geq 0 \quad \sum_{k=0}^{N} |a_k^{(\infty)}|^p \leq K^p$

En faisant tendre N vers $+\infty$ on obtient $\|a^{(\infty)}\|_p \leq K$.

On reprend l'inégalité de Cauchy : on fixe $\varepsilon > 0$

on fixe $N \geq 0$ et $n \geq N$, $m \geq 0$

$$\sum_{k=0}^{\infty} |a_k^{(n)} - a_k^{(n+m)}|^p \leq \varepsilon^p$$

$$\forall K \quad \sum_{k=0}^{K} |a_k^{(n)} - a_k^{(\infty)}|^p \leq \varepsilon^p$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} |a_k^{(n)} - a_k^{(\infty)}|^p \leq \varepsilon^p$$

$\forall \varepsilon \exists N \; \|a^{(n)} - a^{(\infty)}\|_p \leq \varepsilon$.

10 Théorème

1) En dimension finie, deux normes $\|\cdot\|^{(1)}$ et $\|\cdot\|^{(2)}$ sont équivalentes. $|||\cdot|||$ $|||\cdot|||$

$$\exists \lambda \geq 1 \quad \forall x \in E \quad \frac{1}{\lambda}\|x\|^{(1)} \leq \|x\|^{(2)} \leq \lambda \|x\|^{(1)}$$

et la boule unité fermée $\overline{B}_E$ est compacte

$$\overline{B}_E = \{x \in E : \|x\| \leq 1\}$$

2) Si E est de dimension $\infty$, alors $\overline{B}_E$ n'est pas compacte.

voir plus loin : caractérisation Banach $\Leftrightarrow$ série convergente.

## I.2 Espace de Hilbert

11 Définition

1) Si H est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel un produit scalaire euclidien est une application

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : H \times H \to \mathbb{R}$$

vérifiant

a) $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est bilinéaire

b) $\langle \cdot , \cdot \rangle$ est symétrique.

c) la forme quadratique $Q(x) = \langle x, x \rangle$ est définie positive $\begin{cases} \forall x \; Q(x) \geq 0 \\ Q(x) = 0 \iff x = 0 \end{cases}$

2) si H est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel, un produit scalaire hermitien est une application

$$\langle \cdot , \cdot \rangle : H \times H \to \mathbb{C}$$

a) $\langle x, y \rangle$ est linéaire en $x$, anti-linéaire en $y$

b) $\langle \cdot , \cdot \rangle$ est antisymétrique

c) la forme quadratique hermitienne est définie positive.

12. <u>Exemple</u> $\ell^2 = \{ (x_n)_{n \geq 0} : \sum_{n=0}^{\infty} |x_n|^2 < +\infty \}$ muni du produit scalaire hermitien.

$$\begin{cases} \langle x, y \rangle = \sum_{n \geq 0} x_k \overline{y_k} \\ \|x\|_2 = \left[ \sum_{n \geq 0} |x_k|^2 \right]^{\frac{1}{2}} \end{cases}$$

13. <u>Remarque</u> Hölder dans le cas $p = 2$ donne Cauchy-Schwarz

$$\left| \sum_{k=1}^{\infty} x_k y_k \right| \leq \left[ \sum |x_k|^2 \right]^{\frac{1}{2}} \left[ \sum |y_k|^2 \right]^{\frac{1}{2}}$$

$\forall x, y \in \ell^2 \quad |\langle x, y \rangle| \leq \|x\|_2 \|y\|_2.$ $\Rightarrow \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

14. <u>Proposition</u> Cauchy-Schwarz est vrai pour tout espace $(H, \langle \cdot , \cdot \rangle)$ muni d'un produit scalaire euclidien : $|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| . \|y\|$.

15. <u>Rappel</u> Identité du parallélogramme.

$$\left\| \frac{x-y}{2} \right\|^2 + \left\| \frac{x+y}{2} \right\|^2 = \frac{1}{2} \left[ \|x\|^2 + \|y\|^2 \right]$$

En particulier $x \in H \mapsto \|x\|^2 \in \mathbb{R}^+$ est strictement convexe.

**16. Rappel** (Identité de polarisation)

1) H réel

$$\langle x, y \rangle = \frac{1}{4}\left[\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\right]$$

2) H complexe

$$\langle x, y \rangle = \frac{1}{4}\left[\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 + i\|x+iy\|^2 - i\|x-iy\|^2\right]$$

**17- Définition** Un espace de Hilbert est un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$ muni d'un produit scalaire hermitien et complet pour la norme associée.

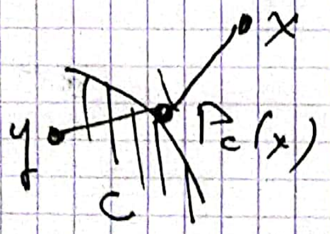
**18 Théorème fondamental** Soit H un espace de Hilbert et C un convexe fermé de H. Alors pour tout $x \in H$, il existe un unique point $P_C(x) \in C$ tel que

$$\forall y \in C \quad \|x-y\| \geq \|x - P_C(x)\|$$

ou bien

$$P_C(x) \in \underset{y \in C}{\operatorname{argmin}} \|x-y\|$$

**19 Complément au théorème**





$$\forall y \in C \quad \langle y - P_C(x), x - P_C(x) \rangle \leq 0$$

**20 Corollaire**

Si M s.e.v fermé de H et

$M^\perp := \{x \in H : \langle x, y \rangle = 0 \ \forall y \in M\}$

Alors $H = M \oplus M^\perp$

**2.1 Corollaire** Soit H un espace de Hilbert séparable (admettant un sous-ensemble dense dénombrable), alors H admet une b.o.n. $(e_n)_{n\geq 0}$ (ou une famille totale)

a) $\forall n \geq 0 \quad \|e_n\| = 1$

b) $\forall m > n \geq 0 \quad \langle e_n, e_m \rangle = 0$

c) $\bigcup_{N\geq 0} \mathrm{Vect}(e_0, e_1, \dots, e_n)$ dense dans H.

preuve Gram-Schmidt.

**22 Corollaire** Egalité de Parseval

Soit H Hilbert séparable et $(e_n)_{n\geq 0}$ une b.o.n. Alors

1) $\forall x \in H \quad \|x\|^2 = \sum_{n\geq 0} |\langle x | e_n \rangle|^2$

2) $\forall x, y \in H.$

$$\langle x, y \rangle = \sum_{n\geq 0} \langle x | e_n \rangle \overline{\langle y | e_n \rangle}$$

3) $\sum_{n\geq 0} \langle x | e_n \rangle e_n$ converge et est égal à $x$

preuve 1) on montre d'abord l'inégalité de Bessel

$$\sum_{k\geq 0} |\langle x | e_k \rangle|^2 \leq \|x\|^2$$

En effet soit $H_n = \mathrm{Vect}(e_0 \dots e_n)$ et $P_n$ la projection $\perp$ sur $H_n$. Alors

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \langle x | e_k \rangle e_k$$

(on vérifie en effet : $\langle x - P_n(x) | e_k \rangle = 0$ pour tout $k \in [\![0, n]\!]$).

Comme $x = x - P_n(x) + P_n(x)$

$$\|x\|^2 = \|x - P_n(x)\|^2 + \|P_n(x)\|^2$$
$$\geq \|P_n(x)\|^2$$

De plus $\|P_n(x)\|^2 = \sum_{k=0}^{n} |\langle x | e_k \rangle|^2$
D'où l'inégalité de Bessel.

2) On montre maintenant que $\sum_{k\geq 0} \langle x | e_k \rangle e_k$ converge dans H et que ce vecteur est égal à $x$.
On vérifie que les sommes partielles sont de Cauchy.

$$\| P_{n+k}(x) - P_n(x) \|^2$$
$$= \| \sum_{i=n+1}^{n+k} \langle x | e_i \rangle e_i \|^2$$
$$= \sum_{i=n+1}^{k} |\langle x | e_i \rangle|^2$$

On utilise alors les sommes partielles de $\sum_{k\geq 0} |\langle x | e_k \rangle|^2$ sont de Cauchy lorsque la série est convergente, qui est vrai d'après Bessel.
Soit $y = \sum_{k\geq 0} \langle x | e_k \rangle e_k$

$$\langle x - y | e_k \rangle = \lim_{n\to+\infty} \langle x - P_n(x) | e_k \rangle = 0.$$
$x - y \perp \bigcup_{n\geq 0} \mathrm{Vect}(e_0 \ldots e_n)$
d'où $x - y \perp \mathrm{adh}(\bigcup_{n\geq 0} \mathrm{Vect}(e_0 \ldots e_n))$
et $M = \mathrm{adh}(\bigcup_{n\geq 0} \mathrm{Vect}(e_0 \ldots e_n)) = H$
par définition de b.o.n.
D'où $x - y \perp H \Rightarrow x = y = \sum_{k\geq 0} \langle x | e_k \rangle e_k$

3) On montre maintenant l'égalité de Parseval

$$x = P_n(x) + \sum_{k\geq n+1} \langle x | e_k \rangle e_k$$
$$\|x\|^2 = \|P_n(x)\|^2 + \sum_{k\geq n+1} |\langle x | e_k \rangle|^2$$