D'une part

$$\|P_n(x)\|^2 = \sum_{k=0}^{n} |\langle x | e_k \rangle|^2$$

D'autre part

$$\sum_{k \geq n+1} |\langle x | e_k \rangle|^2 \leq \|\sum_{k \geq n} \langle x | e_k \rangle e_k\|^2$$

$$= \|x - P_n(x)\|^2$$

En passant à la limite sur n.

$$\|x\|^2 = \sum_{n \geq 0} |\langle x | e_n \rangle|^2$$

I.3 Applications linéaires continues et dual topologique

On rappel la définition fondamental

23. **Définition** Soient $(E, \|\cdot\|_E)$ et $(F, \|\cdot\|_F)$ 2 espaces e.v.n. et $u : E \to F$ une application linéaire. Alors sont équivalente les propositions suivantes
1) u est continue
2) u est continue en 0
3) u est bornée sur B_E (la boule unité de E)

$$\exists C > 0 \quad \forall x \in E \quad \|u(x)\|_F \leq C \|x\|_E$$

24. **Lemme** Si E est de dimension finie et $(F, \|\cdot\|_F)$ est quelconque e.v.n, alors toute $u : E \to F$ linéaire est continue.

preuve soit $d = \dim(E)$ et $(e_1 \ldots e_d)$ base de E

on munit E d'une autre norme

$$|||x||| = |||\sum_{i=1}^{d} x_i e_i||| = \max_{1 \leq i \leq d} |x_i|.$$

On vérifie que $|||\cdot|||$ est bien une norme.
Par équivalence de normes en dimension finie, il existe $C \geq 0$ telle que
$\forall x \in E.\quad |||x||| \leq C \|x\|_E$
On montre maintenant que u est continue

$$\|u(x)\|_F = \|\sum_{i=1}^d x_i u(e_i)\|_F$$
$$\leq \sum_{i=1}^d |x_i| \cdot \|u(e_i)\|_F$$
$$\leq |||x||| \left(\sum_{i=1}^d \|u(e_i)\|_F\right)$$
$$\leq C\left(\sum_{i=1}^d \|u(e_i)\|_F\right) |||x|||.$$

25. Définition
1) L'ensemble des applications linéaires continues de E dans F est noté $\mathcal{L}(E,F)$
2) Si $u \in \mathcal{L}(E,F)$, on appelle norme de u
$$\|u\| = \inf\{c \geq 0 : \forall x \in E \ \|u(x)\|_F \leq C\|x\|_E\}$$
3) $\mathcal{L}(E, \mathbb{K})$ est noté E'

Rem on a donc l'inégalité fondamentale: $\forall x \in E \ \|u(x)\| \leq \|u\| . \|x\|$

26. Lemme Soient $(E, \|\cdot\|_E)$ un e.v.n quelconque et $(F, \|\cdot\|_F)$ un espace de Banach.
Alors $\mathcal{L}(E,F)$ est de Banach.

preuve Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite de Cauchy.
Soit $x \in E$

$$\|u_{n+p}(x) - u_n(x)\|_F \leq \|u_{n+p} - u_n\| \|x\|$$

$(u_n(x))_{n\geq 0}$ est donc de Cauchy donc converge car F est complet.

Scanné avec CamScanner

On note $v(x) = \lim\limits_{n \to +\infty} u_n(x)$

on constate que v est linéaire

$$\|u_{n+k}(x) - u_n(x)\| \leq \|u_{n+k} - u_n\| \, \|x\|$$

$$\leq \underbrace{\left(\sup_{k \geq 0} \|u_{n+k} - u_n\|\right)}_{C_n} \|x\|$$

En faisant tendre $k \to +\infty$

$$\|v(x) - u_n(x)\| \leq C_n \|x\|$$

$$\|v - u_n\| \leq C_n$$

Comme $\lim\limits_{n \to +\infty} C_n = 0$ on a bien $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = v$. ∎

27. __Corollaire__ $(E', \|\cdot\|)$ est un espace de Banach. On rappelle : si $u \in E'$

$$\|u\| = \sup\{|u(x)| : \|x\| \leq 1\}$$

Exemple : $H' = H$ voir plus loin

Il y a d'autres notions de convergence que la convergence au sens de la norme.

28. __Definition__ Soit E un espace de Banach et E' son dual topologique.

1) Soit $(x_n)_{n \geq 0}$ une suite de E. On dit qu'elle converge au sens de la topo faible (ou pour la topologie $\sigma(E, E')$) si pour tout $\xi \in E'$, $(\xi(x_n))_{n \geq 0}$ converge dans $\mathbb{K}$.

2) Soit $(\xi_n)_{n \geq 0}$ une suite de E'. On dit qu'elle converge au sens de la topologie faible * (ou pour la topologie $\sigma(E', E)$) si pour tout $x \in E$ $(\xi_n(x))_{n \geq 0}$ converge dans $\mathbb{K}$.

29. **Exemple** $H = \ell^2(\mathbb{K})$ et en la base canonique $e_n = (0 \dots 0, 1, 0 \dots)$ 1 à la $n$ème place.
Alors $(e_n)_{n \geq 0}$ ne converge pas au sens de la norme mais converge faiblement vers 0.

preuve On a d'une part $\|e_m - e_n\| = \sqrt{2}$ pour tout $m \neq n$. D'autre part si $(e_n)_{n \geq 0}$ convergeait vers $x \in H$ au sens de la norme

$$\|e_n - x\| \to 0$$

Pour n suffisamment grand : $n \geq N$

$$\|e_n - x\| < \frac{1}{2}\sqrt{2}$$

Alors :

$$\forall m, n \geq N \quad \|e_n - e_m\| = \sqrt{2} \leq \|e_n - x\| + \|x - e_m\| < \sqrt{2}$$

et on obtient une contradiction.

Mais toute $\xi \in H'$ est de la forme.

$$\xi(x) = \langle x, y \rangle$$

$y = (y_0, y_1, \dots) \in \ell^2 = H$.

$$\xi(e_n) = \overline{y_n}$$

Comme $\sum_{n \geq 0} |y_n|^2 < +\infty$ $\lim_{n \to +\infty} \xi(e_n) = 0$.

à faire avant

30. **Exemple** Soit H un espace de Hilbert. Alors pour tout $\xi \in H'$ il existe un unique $y \in H$ telque $\forall x \in H$, $\xi(x) = \langle x, y \rangle$

preuve Algebriquement $M = \ker(\xi)$ est un s.e.v de codimension 1. Topologiquement comme ξ est continue, M est fermé.

et donc $H = M \oplus \mathbb{K} y$.

Soit P_M la projection orthogonale sur M.

$$x = P_M(x) + \frac{\langle x, y\rangle}{\|y\|^2} y$$

$$\xi(x) = \langle x, y\rangle \frac{\xi(y)}{\|y\|^2} = \left\langle x, \frac{\overline{\xi(x)}}{\|y\|^2} y\right\rangle.$$

Pour l'unicité :

$$\xi(x) = \langle x, y_1\rangle = \langle x, y_2\rangle$$

d'où $\quad y_1 - y_2 \in H^\perp \quad y_1 = y_2$ ∎

31. Exemple Lorsque $(E, \|\cdot\|)$ est de dimension fini, les deux notions de convergence, au sens de la norme, et au sens faible, coïncident

I.4. Autres notions de convergence.

32. Définition Soit $E = \mathcal{C}^0([0,1])$ muni de la norme du sup.

$$\|f\|_\infty = \sup_{x\in[0,1]} |f(x)|$$

On dit que $(f_n)_{n\geq 0}$ converge simplement vers g (fonction de $[0,1] \to \mathbb{R}$ quelconque) si

$$\forall x \in [0,1], (f_n(x))_{n\geq 0} \text{ converge vers } g(x).$$

33. Exemple $f_n(x) = x^n$, $x \in [0,1]$ Alors $(f_n)_{n\geq 0}$ converge simplement vers δ_1 :

$$\delta_1(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in [0,1[\\ 1 & \text{si } x = 1 \end{cases}$$

La convergence simple n'entraîne pas la convergence uniforme. On a cependant une réciproque.

(Dini 1)

34. Proposition Soient (X, τ) un espace topologique compact, $(f_n)_{n\geq 0}$ une suite de fonctions continues : $\forall n \geq 0\ f_n \in \mathcal{C}^0(X, \mathbb{R})$. On suppose

1) la suite est croissante

$$\forall x\ \forall n \geq 0 \quad f_n(x) \leq f_{n+1}(x).$$

2) la suite converge simplement vers g.

3) $g \in \mathcal{C}^0(X, \mathbb{R})$.

Alors $(f_n)_{n\geq 0}$ converge uniformément vers g.

preuve La convergence simple entraîne : on fixe $\varepsilon > 0$

$$\forall x \in X \quad \exists N_x \geq 0 \quad \forall n \geq N_x$$

$$|f_n(x) - g(x)| < \varepsilon$$

On cherche à étendre l'inégalité à un voisinage de x. Pour $n = N_x$, par continuité de f_{N_x} et celle de g : il existe un voisinage ouvert U_x de x tel que.

$$\forall y \in U_x \quad |f_{N_x}(y) - g(y)| < \varepsilon$$

On utilise maintenant la croissance de la suite :

$$\forall n \geq N_x \quad \forall y \in U_x \qquad f_{N_x}(y) \leq f_n(y)$$

En utilisant

$$\begin{cases} \forall y \in U_x & g(y) - \varepsilon < f_{N_x}(y). \\ \forall y \in U_x & f_n(y) \leq g(y) \end{cases}$$

on obtient

$$\forall y \in U_x \quad \forall n \geq N_x$$

$$g(y) - \varepsilon < f_n(y) < g(y) + \varepsilon$$

En résumé on vient de montrer.

$$\forall \varepsilon > 0 \ \forall x \in X \ \exists N_x \ \exists U_x$$

$$\forall y \in U_x \ \forall n \geq N_x$$

$$|f_n(y) - g(y)| < \varepsilon$$

$(U_x)_{x \in X}$ forme un recouvrement de X ; soit $(U_{x_i})_{i=1}^{r}$ un sous recouvrement fini $\{x_1 \dots x_r\} \subseteq X$ et $N = \max_{1 \leq i \leq r} N_{x_i}$. Alors.

$$\forall n \geq N \quad \forall y \in X \quad |f_n(y) - g(y)| < \varepsilon$$

on vient de montrer la convergence uniforme ∎

35. <u>Proposition. Dini II</u>

Soit $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervalle compact, $f_n : I \to \mathbb{R}$ des fonctions scalaires (pas forcément continues). On suppose

1) Pour tout n, $f_n : I \to \mathbb{R}$ est croissante
2) $(f_n)_{n \geq 0}$ converge simplement vers $g : I \to \mathbb{R}$.
3) $g \in \mathcal{C}^0(I, \mathbb{R})$

Alors $(f_n)_{n \geq 0}$ converge uniformément vers g.

<u>preuve</u> Soit $\varepsilon > 0$. La convergence simple implique

$$\forall x \in I \quad \exists N_x \quad \forall n \geq N_x \quad |f_n(x) - g(x)| < \varepsilon.$$

Fixons $I = [a, b]$. Pour tout $M \geq 1$

on considère la subdivision

$$\begin{cases} a_k^m = a + \frac{k}{m}(b-a) \\ \forall k \in [\![0, m]\!] \end{cases}$$

Comme g est continue sur un compact, g est uniformément continue

$$\exists m \geq 1 \quad \forall k \in [\![1, m]\!]$$

$$\forall x, y \in [a_{k-1}^m, a_k^m] \quad |g(x) - g(y)| < \varepsilon$$

On pose $N = \max\{N_{a_k^m} : k \in [\![1, m]\!]\}$.

Soit $x \in I$, par exemple $a_{k-1}^m \leq x \leq a_k^m$.

Alors pour $n \geq N$

$$\begin{cases} f_n(a_{k-1}^m) \leq f_n(x) \leq f_n(a_k^m) \\ g(a_{k-1}^m) - \varepsilon < f_n(a_{k-1}^m) \\ f_n(a_k^m) < g(a_k^m) + \varepsilon \\ g(a_{k-1}^m) - \varepsilon \leq g(x) \leq g(a_k^m) + \varepsilon \end{cases}$$

On en déduit

$$f_n(x) - g(x) < f_n(a_k^m) - g(a_{k-1}^m) + \varepsilon$$

$$< g(a_k^m) - g(a_{k-1}^m) + \varepsilon.$$

$$< 2\varepsilon$$

De même $f_n(x) - g(x) > -2\varepsilon$

D'où

$$\forall n \geq N \quad \forall x \in I \quad |f_n(x) - g(x)| < 2\varepsilon$$

On vient de montrer la convergence uniforme ■

36. Complément à Dini II

Soient $(f_n)_{n\geq 0}$ une suite de fonctions de répartitions (croissante, cadlag, de limite 0-1 en $\pm\infty$), et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction croissante continue.
Si $(f_n)_{n\geq 0}$ converge simplement vers g, alors $(f_n)_{n\geq 0}$ converge uniformément vers g.

On finit par un critère commode de complétude des e.v.n. On rappelle d'abord.

mettre dans le chapitre espace de Banach.

37. Définition Soit $(E, \|\cdot\|)$ un e.v.n. et $(x_n)_{n\geq 0}$ une suite de vecteurs de E. On dit que $\sum_{n\geq 0} x_n$ converge normalement si $\sum_{n\geq 0} \|x_n\| < +\infty$

38. Lemme Soit $(E, \|\cdot\|)$ un e.v.n. Alors E est complet ssi toute suite normalement convergente est convergente.

preuve 1) Supposons E complet et $\sum_{n\geq 0} \|x_n\| < +\infty$
$S_n = \sum_{k=0}^{n} x_k$ les sommes partielles.
Alors

$$
\begin{aligned}
\| S_{n+k} - S_n \| &= \| \textstyle\sum_{i=n+1}^{n+k} x_i \| \\
&\leq \textstyle\sum_{i=n+1}^{n+k} \|x_i\| = \tilde{S}_{n+k} - \tilde{S}_n
\end{aligned}
$$

Comme $\sum_{n\geq 0} \|x_n\| < +\infty$, les sommes partielles $(\tilde{S}_n)$ convergent et donc de Cauchy. $(S_n)_{n\geq 0}$ est de Cauchy donc converge.

On construit par récurrence une suite $(n_k)_{k\geq 0}$ strictement croissante.

$$\forall k\geq 0 \quad \forall \ell \geq 0 \quad \forall n \geq n_k$$
$$\|x_{n+\ell} - x_n\| \leq \frac{1}{2^k}.$$

Alors

$$\forall k\geq 0 \quad \|x_{n_{k+1}} - x_{n_k}\| \leq \frac{1}{2^k}$$

et donc $\sum_{k\geq 0} \|x_{n_{k+1}} - x_{n_k}\| < +\infty$. Par hypothèse $\sum_{k\geq 0} (x_{n_{k+1}} - x_{n_k})$ converge

Les sommes partielles S_k vérifie

$$S_k = x_{n_{k+1}} - x_{n_0}$$

La suite $(x_{n_k})_{k\geq 0}$ converge vers un point x_*

Pour $k\geq 1$

$$\exists N\geq 1 \ \forall \ell \geq N \quad \|x_{n_\ell} - x_*\| < \frac{1}{2^k}$$

$$\forall n \geq n_k \quad \|x_n - x_{n_k}\| < \frac{1}{2^k}.$$

D'où

$$\forall n \geq n_k \quad \|x_n - x_*\| < \frac{1}{2^{k-1}}$$

La suite $(x_n)_{n\geq 0}$ converge vers x_* ∎

3] . Rappel : Intégrale impropre

a) Impropre sur un intervalle borné $[a,1[$

Soit $f : [a,1[\to \mathbb{R}$ mesurable telle que $f \in L^1([a,b])$ pour tout $b \in [a,1[$. On note $\int_a^1 f(x)\,dx$ l'intégrale impropre en 1 (simple notation)

On dit que $\int_a^1 f(t)dt$ converge si

$$\lim_{b \to +\infty} \int_a^b f(t)dt \text{ existe}$$

b) Impropre sur l'intervalle non bornée $[a,+\infty[$

Soit $f : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ mesurable telle que $f \in L^1([a,b])$ pour tout $b \in [0,+\infty[$. On note $\int_a^{+\infty} f(t)dt$ l'intégrale impropre en $+\infty$. On dit que $\int_a^{+\infty} f(t)dt$ converge si

$$\lim_{b \to +\infty} \int_a^b f(t)dt \text{ existe}$$

c) convergence absolue

40 Exemple $\int_0^{+\infty} t^2 \sin(t^4)dt$ converge et cependant $t \mapsto t^2 \sin(t^4) \notin L^1([0,+\infty[)$

preuve 1) L'intégration par partie donne

$$\int_1^b t^2 \sin(t^4)\, dt = \int_1^b 4t^3 \sin(t^4) \frac{dt}{4t}$$

$$= \left[-\frac{\cos(t^4)}{4t}\right]_1^b - \int_1^b \frac{\cos(t^4)}{4t^2} dt$$

$\int_1^{+\infty} \frac{\cos(t^4)}{t^2} dt$ converge absolument

Le terme entre crochet tend vers $\frac{\cos(1)}{4}$.

L'intégrale impropre est donc convergente.

2) L'intégrale ne converge pas absolument.

Le changement de variable

$$u = t^4 \qquad du = 4t^3 dt$$

donne (en fait calculer sur tout $[a,b] \subset]0,+\infty[$)

$$\int_0^{+\infty} t^2 \sin(t^4)\, dt = \int_0^{+\infty} \sqrt{u} \sin(u) \frac{du}{4u^{3/4}}$$

$$= \frac{1}{4}\int_0^{+\infty} \frac{\sin(u)}{u^{1/4}} du.$$

Est-il impropre en $u=0$. A priori oui mais $\sin(u) \sim u$ et donc $\frac{\sin(u)}{u^{1/4}} \sim u^{3/4}$
et donc $\frac{\sin(u)}{u^{1/4}}$ est prolongeable par continuité par 0 en $u=0$.
On s'intéresse à $* = \int_1^{+\infty} \left|\frac{\sin(u)}{u^{1/4}}\right| du$

qu'on minore par

$$* \geq \sum_{k\geq 0} \int_{\pi/4+2k\pi}^{3\pi/4+2k\pi} \frac{\sin(u)}{u^{1/4}}\,du$$

$$\geq \sum_{k\geq 0} \sqrt{2} \int_{\pi/4+2k\pi}^{\frac{3\pi}{4}+2k\pi} \frac{du}{u^{1/4}}$$

$$\geq \sum_{k\geq 0} \frac{\sqrt{2}\ \pi/2}{\left(\frac{3\pi}{4}+2k\pi\right)^{1/4}} = +\infty$$

On vient de montrer que l'intégrale est absolument divergente.

41 Lemme (Abel). Soient $f,g : [a,+\infty[\to \mathbb{R}$ des fonctions continues vérifiant.
1) $f \in \mathcal{C}^1([a,+\infty[, \mathbb{R})$
2) f est décroissante
3) $\exists\, M \geq 0\ \forall\, b \geq a\ \left|\int_a^b g(t)\,dt\right| \leq M$.

Alors $\int_0^{+\infty} f(t)g(t)\,dt$ converge.

(Peut-on supposer unique f décroissante ? oui : on approche g par un polynôme, on subdivise selon le signe de g, on applique la formule de la moyenne sur les intervalles où g ne change pas de signe, on applique enfin Abel pour les séries).

I.5 Théorème fondamentaux de l'intégration

Dans tout ce qui suit on considère $(\Omega, \mathcal{B}, \mu)$ un espace mesuré : $\mathcal{B}$ une σ-algèbre, μ une mesure σ-finie

42. Théorème Beppo-Levi

Soit $(f_n)_{n\geq 0}$ une suite de fonctions scalaires mesurable presque partout positive.

Alors $\displaystyle\int \liminf_{n\to+\infty} f_n \, d\mu \leq \liminf_{n\to+\infty} \int f_n \, d\mu.$

Si de plus la suite est croissante $f_n \leq f_{n+1}$ p.p.

Alors $\displaystyle\int \lim_{n\to+\infty} f_n \, d\mu = \lim_{n\to+\infty} \int f_n \, d\mu.$

43. Théorème convergence dominée

Soit $(f_n)_{n\geq 0}$ une suite de fonctions mesurable convergeant simplement p.p vers une fonction g.
On suppose qu'il existe $\varphi : \Omega \to \mathbb{R}^+$ intégrable

$$\forall \omega \in \Omega \text{ p.p. } \forall n \geq 0 \quad |f_n(\omega)| \leq \varphi(\omega)$$

Alors $(f_n)_{n\geq 0}$ converge vers g dans L^1

$$\lim_{n\to+\infty} \int |f_n - g| \, d\mu = 0.$$

En particulier g est intégrable et

$$\lim_{n\to+\infty} \int f_n \, d\mu = \int g \, d\mu.$$

44. Théorème Continuité sous le signe somme

Soit (X, d) un espace métrique. et $f : \Omega \times X \to \mathbb{R}$ une fonction scalaire

Soit $x_0 \in X$. On suppose qu'il existe un voisinage ouvert $U \ni x_0$ et une fonction $\varphi : \Omega \to \mathbb{R}^+$ intégrable tels que.

1) $\forall x \in U$, $\omega \in \Omega \mapsto f(\omega, x)$ est intégrable

2) Pour presque tout $\omega \in \Omega$, $x \in U \mapsto f(\omega, x)$ est continue en x_0.

3) $\forall x \in U$ $\forall \omega \in \Omega$ p.p. $|f(\omega, x)| \leq \varphi(\omega)$

Alors $x \in U \mapsto \int f(\omega, x)\, d\mu$ est continue en x_0

4.5 Théorème de dérivabilité sous le signe somme

Soit $U \subseteq \mathbb{R}^d$ un ouvert et $f : \Omega \times U \to \mathbb{R}$ une fonction scalaire. On suppose qu'il existe une fonction $\varphi : \Omega \to \mathbb{R}^+$ intégrable telle que.

1) $\forall x \in U$: $\omega \in \Omega \mapsto f(\omega, x)$ est intégrable

2) $\forall \omega \in \Omega$ p.p $x \in U \mapsto f(\omega, x)$ est différentiable en tout point $x \in U$

[$\forall x \in U$, $\omega \mapsto D_x f(\omega, x)$ est intégrable]

3) $\forall \omega \in \Omega$ p.p., $\forall x \in U$, $\|D_x f(\omega, x)\| \leq \varphi(\omega)$

Alors $x \in U \mapsto \int f(\omega, x)\, d\mu$ est différentiable en tout point de U de diff

$$\int D_x f(\omega, x)\, d\mu.$$