$$\Phi(h) = \underbrace{\int |f|^{p-1} \frac{\bar{f}}{|f|}}_{\in L^q} h \, d\mu$$

III Convolution $\quad X = \mathbb{R}^d, \mu = \text{Lebesgue}, \mathcal{A} = \text{Borélien}$

Rappel $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$

$\text{supp}(f) = \bigcup \{ \Omega : \Omega \text{ ouvert}, f|_\Omega = 0 \text{ p.p.} \}$

III 1 Définition et propriétés simples

4.3 Notations multiindicielles $\quad f \in \mathcal{C}^\infty(U, \mathbb{R}) \quad U \subset \mathbb{R}^d$ ouvert.

$f(x) = f(x_1 - x_d)$

$\alpha = (\alpha_1 - \alpha_d) \in \mathbb{N} \times \cdots \times \mathbb{N} \quad ; \quad |\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_d$

$$\frac{\partial^\alpha f}{\partial x^\alpha} = \left(\frac{\partial^{\alpha_1}}{\partial x_1^{\alpha_1}} \cdots \frac{\partial^{\alpha_d}}{\partial x_d^{\alpha_d}} \right) f.$$

Formule de Taylor à l'ordre N

$$f(x+h) = \sum_{k=0}^{N} \frac{1}{k!} \sum_{\alpha_1 + \cdots + \alpha_d = k} \frac{k!}{\alpha_1! \cdots \alpha_d!} \frac{\partial^\alpha f}{\partial x^\alpha} h^\alpha$$
$$+ \|h\|^N \varepsilon(h)$$

$h = (h_1 - h_d) \qquad h^\alpha = h_1^{\alpha_1} \cdots h_d^{\alpha_d}$

Le terme

$$D^k f(x) . h^k = \sum_{j_1=1}^{d} \cdots \sum_{j_k=1}^{d} \frac{\partial^k f}{\partial x_{j_1} \cdots \partial x_{j_k}} h_{j_1} \cdots h_{j_k}$$

On réécrit toute application $j : [\![1, k]\!] \longrightarrow [\![1, d]\!]$ en fixant le nombre de fois que chaque valeur de $[\![1, d]\!]$ est prise par j

$\alpha_1 = \{ \ell \in [\![1, k]\!] : j_\ell = 1 \}$

$\alpha_2 = \{ \ell \in [\![1, k]\!] : j_\ell = 2 \}$

Il reste à sommer sur tous les $\alpha = (\alpha_1 - \alpha_d)$ tels que $\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_d = k$. Chaque terme

$$\frac{\partial^k f}{\partial x_{j_1} \cdots \partial x_{j_k}} h_{j_1} \cdots h_{j_k}$$

est répété $\binom{k}{\alpha_1} \binom{k - \alpha_1}{\alpha_2} \cdots \binom{k - \alpha_1 - \cdots - \alpha_{d-1}}{\alpha_d}$

44 Définition : $f \in \mathcal{L}^\infty_c(\mathbb{R}^d)$ à support compact et $g \in \mathcal{L}^\infty_{loc}(\mathbb{R}^d)$. On appelle convolution de f et g.

$$f * g(x) = \int f(y)\, g(x-y)\, dy$$
$$= \int f(x-y)\, g(y)\, dy.$$

(par changement de variable $y \mapsto x-y$

On cherchera ultérieurement à étendre $f*g$ à d'autres fonctions. $\left\{ L^p * L^q \right.$ $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ ou $L^1 * L^1$ ou $L^1 * L^2$

$\left\{ L^p * L^q \right.$ $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1+\frac{1}{2}$

45 Remarque $\operatorname{supp}(f) = \overline{\{x : f(x) \neq 0\}}$

Si f et g ont à support compact, alors $\operatorname{supp}(f*g) \subseteq \operatorname{supp}(f) + \operatorname{supp}(g)$

preuve $f*g(x) \neq 0$.

$$f*g(x) = \int_{\{f \neq 0\}} f(y)\, g(x-y)\, dy.$$

$\exists y \in \{f \neq 0\}$ $f(y)g(x-y) \neq 0$. $g(x-y) \neq 0$.

$\exists y \in \{f \neq 0\}$ $x - y \in \{g \neq 0\}$

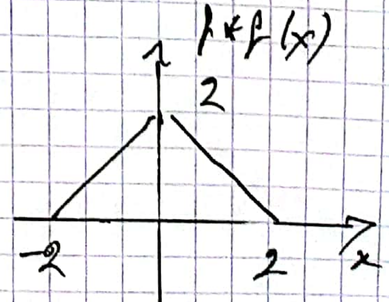
$$\{f*g \neq 0\} \subseteq \{f \neq 0\} + \{g \neq 0\}$$

$$\overline{\{f*g \neq 0\}} \subseteq \overline{\{f \neq 0\}} + \overline{\{g \neq 0\}}$$

46 Exemple $f = \mathbb{1}_{[-1,+1]}$ $\operatorname{supp}(f*f) \subseteq [-2,+2]$

$x \in [0,2]$

$$f*f(x) = \int \mathbb{1}_{(-1 \leq Y \leq 1)}\, \mathbb{1}_{(x-1 \leq Y \leq x+1)}\, dy.$$
$$= \int \mathbb{1}_{x-1 \leq Y \leq 1}\, dy.$$
$$= 2 - x$$



La convolution a un effet régularisant.

46 **Propriété** Soit $f \in \mathcal{L}_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ (bornée à support compact) et $g \in \mathcal{C}^N(\mathbb{R}^d)$ (de classe $\mathcal{C}^N$). Alors $f * g \in \mathcal{C}^N(\mathbb{R}^d)$ et

$\forall |\alpha| \leq N \qquad \frac{\partial^\alpha f*g}{\partial x^\alpha} = f * \frac{\partial^\alpha g}{\partial x^\alpha}$

preuve Par recurrence sur l'ordre lexicographique

Pour exemple on montre que $\frac{\partial f*g}{\partial x_1} = f * \frac{\partial g}{\partial x_1}$

Théorème de derivation sous le signe somm.

$F(x,y) = f(y)\, g(x-y)$. $\quad , x_0 \in \mathbb{R}^d$.

1) $\forall x \in B(x_0, 1) \qquad y \mapsto F(x,y) \in L^1$

2) $\forall y \in \mathbb{R}^d \qquad x \mapsto F(x,y)$ derivable $/x_1$.

3) $y \mapsto \sup_{x \in B(x_0, 1)} \frac{\partial F}{\partial x_1}(x,y) \in L^1$

En effet $\frac{\partial g}{\partial x_1}(x-y)$ est borné sur $\overline{B(x_0, r) - \{f \neq 0\}}$

III.2 Convolution de $L^p * L^q$ $\quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

47 **Proposition**: Soit $p \in [1, +\infty[\cup \{\infty\}$ et q l'exposant conjugué alors pour tout $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$, $g \in L^q(\mathbb{R}^d)$

1) $\forall x \in \mathbb{R}^d \qquad y \mapsto f(y)\, g(x-y) \in L^1(\mathbb{R}^d)$ et est indépendant du choix des classes de f et de g.

2) $\int f(y)\, g(x-y)\, dy = \int f(x-y)\, g(y)\, dy$ est noté $f*g(x) = g*f(x)$.

3) $f*g \in \mathcal{C}_b^0(\mathbb{R}^d)$ (fonct. continues bornées)

4) Si $p \in]1, +\infty[$ alors $f*g \in \mathcal{C}_0^0(\mathbb{R}^d)$. continues tendant vers zéro à l'infini

5) $\|f*g\|_\infty \leq \|f\|_p \|g\|_q$