46 Propriété Soit $f \in \mathcal{L}^\infty_c(\mathbb{R}^d)$ (bornée à support compact) et $g \in \mathcal{C}^N(\mathbb{R}^d)$ (de classe $\mathcal{C}^N$). Alors $f*g \in \mathcal{C}^N(\mathbb{R}^d)$ et

$$\forall |\alpha| \leq N \qquad \frac{\partial^\alpha f*g}{\partial x^\alpha} = f * \frac{\partial^\alpha g}{\partial x^\alpha}$$

preuve Par récurrence sur l'ordre lexicographique

Par exemple on montre que $\dfrac{\partial f*g}{\partial x_1} = f * \dfrac{\partial g}{\partial x_1}$

Théorème de dérivation sous le signe somme.

$F(x,y) = f(y)\, g(x-y)$, $x_0 \in \mathbb{R}^d$.

1) $\forall x \in B(x_0, 1)$ $\quad y \mapsto F(x,y) \in L^1$

2) $\forall y \in \mathbb{R}^d$ $\quad x \mapsto F(x,y)$ dérivable $/x_1$.

3) $y \mapsto \sup_{x \in \overline{B(x_0,1)}} \dfrac{\partial F}{\partial x_1}(x,y) \in L^1$

En effet $\dfrac{\partial g}{\partial x_1}(x-y)$ est borné sur $\overline{B(x_0,r) - \{f \neq 0\}}$

III.2 Convolution de $L^p * L^q$ $\quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

47 Proposition : Soit $p \in [1,+\infty[\cup \{\infty\}$ et q l'exposant conjugué alors pour tout $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$, $g \in L^q(\mathbb{R}^d)$

1) $\forall x \in \mathbb{R}^d$ $\quad y \mapsto f(y)\, g(x-y) \in L^1(\mathbb{R}^d)$ et est indépendant du choix des classes de f et de g.

2) $\int f(y)\, g(x-y)\, dy = \int f(x-y)\, g(y)\, dy$ est noté $f*g(x) = g*f(x)$.

3) $f*g \in \mathcal{C}^0_b(\mathbb{R}^d)$ (fonct. continue bornée)

4) Si $p \in]1,+\infty[$ alors $f*g \in \mathcal{C}^0_0(\mathbb{R}^d)$. continue tendant vers zéro à l'infini

5) $\|f*g\|_\infty \leq \|f\|_p \|g\|_q$

preuve

1) Si $f = f'$ pp et $g = g'$ pp.

alors. $[y \mapsto g(x-y)] = [y \mapsto g'(x-y)]$ pp.

De plus pour Hölder

$$\left|\int f(y) g(x-y) dy\right| \leq \|f\|_p \|g\|_q.$$

2) La transformation $\varphi(y) = x - y$ preserve Lebesgue et est de Jacobien 1.

$$\int f(y) g(x-y) dy = \int f(x-y) g(y) dy.$$

Supposons $p \in [1, +\infty[$ Sinon $p = +\infty$ et $q \in L^1$.

3) On montre que $f * g$ est continue : Soit $x_0 \in \mathbb{R}^d$ et $\varepsilon > 0$, on approche f par $h \in \mathcal{C}^0_c(\mathbb{R}^d)$ dans L^p (on aurait approché g si $p = +\infty$).

$$\|f - h\|_p \leq \varepsilon$$

$$|f*g(x) - f*g(x_0)|$$

$$\leq |h*g(x) - h*g(x_0)| + 2\|f-h\|_p \|g\|_q$$

Soit $K = \text{supp}(h)$ $\qquad h*g(x) = \int h(x-y) g(y) dy$

$h(x-y) \neq 0 \Leftrightarrow y \in x - K$

On prend $x \in B(x_0, 1)$ on note $L = \overline{B(x_0,1)} - K$.

$$|h*g(x) - h*g(x_0)| \leq \int |h(x-y) - h(x_0-y)| |g(y)| dy$$

$$\leq \int_L |h(x-y) - h(x_0-y)| |g(y)| dy$$

On pose

$$F(x,y) = \mathbb{1}_L(y) [h(x-y) - h(x_0-y)] g(y)$$

1) $\forall x \in B(x_0, 1)$ $\quad y \mapsto F(x,y) \in L^1$

2) $\forall y \in \mathbb{R}^d$ $\quad x \mapsto F(x,y)$ continue en x_0

3) $\sup_{x \in B(x_0,1)} |F(x,y)| \leq \mathbb{1}_L(y) \, 2\|h\|_\infty |g(y)| \in L^1$

D'où $\lim_{x \to x_0} |h*g(x) - h*g(x_0)| = 0$.

$\exists \eta > 0 \quad |h * g(x) - h * g(x_0)| < \varepsilon \quad \forall x \in B(x_0, \eta)$.

$$|f * g(x) - f * g(x_0)| \leq \varepsilon + 2\varepsilon \|g\|_q .$$

4) On suppose maintenant $p \in]1, +\infty[$ et $q \in]1, +\infty[$.

Soit $\varepsilon > 0$ on approche f par $h \in \mathcal{C}_c^0(\mathbb{R}^d)$ dans L^p. $\|f - h\|_p \leq \varepsilon$

Soit $K = \mathrm{supp}(h)$. Supposons $\|x\| \geq R$.

$h(x-y) \neq 0 \Rightarrow y \in x - K$

supposons $\mathrm{supp}(h) \subseteq B(0, r)$

$$h * g(x) = \int_{\|y\| \geq R - r} h(x-y) g(y)\, dy .$$

$$|h * g(x)| \leq \|h\|_p \, \| \mathbb{1}_{(\|y\| \geq R-r)} g \|_q$$

$$\lim_{R \to +\infty} \| \mathbb{1}_{(\|y\| \geq R-r)} g \|_q = 0$$

il existe $R > 0$ tel que $|h * g(x)| \leq \varepsilon \quad \forall \|x\| \geq R$.

$$|f * g(x)| \leq |(f-h) * g(x)| + |h * g(x)| \leq \varepsilon (1 + \|g\|_q)$$

on a montré $f * g \in \mathcal{C}_c^0(\mathbb{R}^d)$. ∎

<u>4-8 Application</u> Soit $A \subset \mathbb{R}^d$ un borélien borné, $\mu(A) > 0$

Alors $A - A$ contient un voisinage de 0.

<u>preuve</u> $\mathbb{1}_A * \mathbb{1}_{-A} \in \mathcal{C}_c^0(\mathbb{R}^d)$

$$\mathbb{1}_A * \mathbb{1}_{-A}(x) = \int \mathbb{1}_A(y) \mathbb{1}_{-A}(x-y)\, dy$$
$$= \mu(A \cap (x + A))$$

$\exists U$ voisinage ouvert de 0 t.q.

$\forall x \in U \quad \mu(A \cap (x + A)) > 0$.

$\forall x \in U \quad A \cap (x + A) \neq \emptyset \Rightarrow U \subset A - A$. ∎

$\Rightarrow \exists y \in A \ \exists z \in A$ t.q. $y = x + z$