III.3 convolution $L^1 * L^1$, $L^1 * L^r$, $r \geq 1$

49 Théorème Pour tout $f, g \in L^1$

1) Pour presque tout $x \in \mathbb{R}^d$ $\begin{cases} y \mapsto f(y)\,g(x-y) \\ y \mapsto f(x-y)\,g(x) \end{cases} \in L^1$

et $\int f(y)g(x-y)\,dy = \int f(x-y)\,g(y)\,dy$.

2) On note $f * g(x) = \int f(y)\,g(x-y)\,dy$.

3) $f * g \in L^1$ et $\|f*g\|_1 \leq \|f\|_1 \|g\|_1$

• preuve On applique Fubini

$$\int\left[\int |f(y)\,g(x-y)|\,dy\right]dx$$

$$= \int \left[\int |g(x-y)|\,dx\right]|f(y)|\,dy = \|g\|_1 \|f\|_1$$

$\begin{cases} f*g(x) := \int f(y)g(x-y)\,dy \text{ existe p.p.} \\ \|f*g(x)\|_1 \leq \|f\|_1 \|g\|_1 \end{cases}$

Par changement de variable $f*g(x) = \int f(x-y)g(y)\,dy$.

50 Stratégie Définir $L^1 * L^r$ par interpolation entre $L^1 * L^1$ et $L^1 * L^\infty$. On utilise l'approche suivante.

1) $L^\infty \cap L^r$ dense dans L^r pour la norme $\|\cdot\|_r$.

2) L'opérateur linéaire ($f \in L^1$)

$$T : \begin{cases} L^\infty \cap L^r \longrightarrow L^\infty \\ g \longmapsto T[g](x) = \int f(y)\,g(x-y)\,dy \end{cases}$$

vérifie

$$T[g] \in L^r \qquad \|T[g]\|_r \leq \|f\|_1 \|g\|_r$$

3) L'opérateur T se prolonge par continuité.

$$[g_n \to g \text{ ds } L^r,\ g_n \in L^\infty \cap L^r] \Rightarrow T[g] := \lim T[g_n]$$

51 Lemme E une e.v.n, F Banach, $D \subseteq E$ sous ensemble dense de E, $T : D \to F$ un operateur linéaire vérifiant
$\exists C \geq 0$ $\|T(f)\| \leq C\|f\|$
Alors T se prolonge en un operateur $\tilde{T} : E \to F$ au sens
1) $[f_n \to f$ ds $E, f_n \in D] \Rightarrow \tilde{T}(f) = \lim\limits_{n\to+\infty} T(f_n)$ existe.
2) $\|\tilde{T}\| \leq C$

52 Remarque Integration à valeurs vectorielles.
$f \in L^1(\mathbb{R}^d ; \mathbb{C}^N)$ $f = (f_1 \dots f_N)$. Soit $r \in [1, +\infty[$.
Par definition $\int f(y)\,dy = (\int f_1\,dy \dots \int f_N\,dy) \in \mathbb{R}^d$
Alors pour tout $r \in [1, +\infty[$, on note $\|\cdot\|_r$ la norme ℓ^r sur $\mathbb{R}^d$
$$\left\| \int f\,dy \right\|_r \leq \int \|f(y)\|_r\,dy.$$
On cherche à généraliser :
fonction $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}^N$ $\Leftrightarrow$ fonction $F : \mathbb{R}^d \times \{1 \dots N\} \to \mathbb{C}$
On remplace $\{1 \dots N\}$ par $\mathbb{R}^d$; on introduit
$L^1(\mathbb{R}^d, L^r(\mathbb{R}^d))$
$$= \{ F : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \text{ mesurable} : \int \|F(x,\cdot)\|_r\,dx < +\infty \}$$
et on cherche à definir
$$\int F(x,\cdot)\,dx \in L^r \text{ par } y \mapsto \int F(x,y)\,dx$$

53 Théorème (Inégalité de Minkowski). $\forall r \in [1, +\infty[$
pour tout $F : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$ mesurable
$$\left[\int \left| \int |F(x,y)|\,dx \right|^r dy \right]^{\frac{1}{r}} \leq \int \left[\int |F(x,y)|^r\,dy \right]^{\frac{1}{r}} dx$$
preuve On peut supposer $\int \|F(x,\cdot)\|_r\,dx < +\infty$.
On suppose d'abord $F \geq 0$ et on pose
$$F_N(x,y) = \mathbb{1}_{(\|x\|, \|y\| \leq N)} \min(N, F(x,y))$$
En particulier le membre de droite est fini

$$\int \left[\int F_N(x,y)\, dx \right]^r dy$$

$$= \int \left[\int F_N(x,y)\, dx \right]^{r-1} \left[\int F_N(x,y)\, dx \right] dy$$

$$(*) = \int \left[\int \left[\int F_N(x,y)\, dx \right]^{r-1} F_N(x,y)\, dy \right] dx.$$

$$\frac{1}{r} + \frac{1}{r'} = 1 \qquad r'(r-1) = r$$

$$(*) \leq \int \left[\int \left[\int F_N(x,y) dx \right]^r dy \right]^{\frac{1}{r'}} \left[\int F_N(x,y)^r\, dy \right]^{\frac{1}{r}} dx$$

$$= \left[\int \left[\int F_N(x,y) dx \right]^r dy \right]^{\frac{1}{r'}} \int \| F_N(x,\cdot) \|_r\, dx$$

on retrouve des 2 côtés de l'inégalité le terme de gauche

$$\left[\int \left(\int F_N(x,y) dx \right)^r dy \right]^{\frac{1}{r}} \leq \int \| F_N(x,\cdot) \|_r\, dx$$

$$\left\| \int F_N(x,\cdot) dx \right\|_r \leq \int \| F_N(x,\cdot) \|_r\, dx$$

Il reste à appliquer Beppo-Levi. ■

54 | **Lemme** $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ $\quad g \in L^\infty \cap L^r(\mathbb{R}^d)$

Alors $f * g \in L^\infty \cap L^r$ et $\| f * g \|_r \leq \| f \|_1 \| g \|_r$

<u>preuve</u> $\quad F(x,y) = f(x)\, g(y-x)$ $\quad$ ⟹ voir autre preuve Brezis

on suppose $f \geq 0$, $g \geq 0$.

$$\| F(x,\cdot) \|_r = |f(x)|\, \| g \|_r$$

$$\int \| F(x,\cdot) \|_r\, dx = \| f \|_1 \| g \|_r < +\infty$$

Inégalité de Minkowski

$$\int F(x,\cdot)\, dx = y \longmapsto \int f(x)\, g(y-x)\, dx.$$

$$\int F(x,\cdot)\, dx = f * g$$

$$\| f * g \|_r \leq \int \| F(x,\cdot) \|_r\, dx = \| f \|_1 \| g \|_r . \quad ■$$

55 Théorème $\forall f \in L^1$, $\forall r \in [1, +\infty[$, $\forall g \in L^r$

1) $f * g(x)$ existe pp. $\left(\int |f(y) g(x-y)| dy < +\infty \text{ pp}\right)$
2) $\|f * g\|_r \leq \|f\|_1 \|g\|_r$
3) $g \in L^r \mapsto f * g \in L^r$ est linéaire continue

preuve $L^\infty \cap L^r$ dense dans L^r

$$T : \begin{cases} L^\infty \cap L^r \longrightarrow L^r \\ g \longmapsto f * g \end{cases}$$

vérifie $\|Tg\|_r \leq \|f\|_1 \|g\|_r$.

On applique alors le lemme de prolongement.

III 4 Inégalité de Young

56. positionnement du problème

1) Si $\frac{1}{\tilde{p}} + \frac{1}{\tilde{q}} = 1$ alors $\|f * g\|_\infty \leq \|f\|_{\tilde{p}} \|g\|_{\tilde{q}}$

Si $p < \tilde{p}$ et $q < \tilde{q}$ alors $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} > 1$. Peut-on espérer l'existence d'un $r > 1$ tel que

$\|f * g\|_r \leq C \|f\|_p \|g\|_q$ pour une certaine constante ?

2) Supposons qu'une telle constante C existe (indépendamment de f et g). Alors l'inégalité est encore vraie pour $f_\lambda(x) = f(\lambda x)$, $g_\lambda(x) = g(\lambda x)$, $\lambda > 0$.

$$\int f_\lambda(y) g_\lambda(x-y) dy = \left(\frac{1}{\lambda}\right)^d (f * g)(\lambda x)$$

$$\|f_\lambda * g_\lambda\|_r = \left(\frac{1}{\lambda}\right)^d \left(\frac{1}{\lambda}\right)^{\frac{d}{r}} = \left(\frac{1}{\lambda}\right)^{d(1+\frac{1}{r})}$$

$$\|f_\lambda\|_p = \left(\frac{1}{\lambda}\right)^{\frac{d}{p}} \|f\|_p \qquad \|g_\lambda\|_q = \left(\frac{1}{\lambda}\right)^{\frac{d}{q}} \|g\|_q$$

d'où $\left(\frac{1}{\lambda}\right)^{d(1+\frac{1}{r})} \leq C \left(\frac{1}{\lambda}\right)^{d(\frac{1}{p}+\frac{1}{q})} \|f\|_p \|g\|_q$

nécessairement $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 + \frac{1}{r}$