55 **Théorème** $\forall f \in L^1$, $\forall r \in [1, +\infty[$, $\forall g \in L^r$

1) $f * g(x)$ existe pp. $\left(\int |f(y) g(x-y)| dy < +\infty \text{ pp}\right)$
2) $\| f * g \|_r \leq \| f \|_1 \| g \|_r$
3) $g \in L^r \mapsto f * g \in L^r$ est linéaire continue

preuve $L^\infty \cap L^r$ dense dans L^r

$$T : \begin{cases} L^\infty \cap L^r \to L^r \\ g \mapsto f * g \end{cases}$$

vérifie $\| Tg \|_r \leq \| f \|_1 \cdot \| g \|_r$.

on applique alors le lemme de prolongement. $\blacksquare$

III 4 Inégalité de Young.

56. positionnement du problème

1) Si $\frac{1}{\tilde{p}} + \frac{1}{\tilde{q}} = 1$ alors $\| f * g \|_\infty \leq \| f \|_{\tilde{p}} \| g \|_{\tilde{q}}$

Si $p < \tilde{p}$ et $q < \tilde{q}$ alors $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} > 1$. Peut-on espérer l'existence d'un $r > 1$ tel que

$\| f * g \|_r \leq C \| f \|_p \| g \|_q$ pour une certaine constante?

2) Supposons qu'une telle constante C existe (indépendamment de f et g). Alors l'inégalité est encore vraie pour $f_\lambda(x) = f(\lambda x)$, $g_\lambda(x) = g(\lambda x)$, $\lambda > 0$.

$$\int f_\lambda(y) g_\lambda(x-y) dy = \left(\frac{1}{\lambda}\right)^d (f * g)(\lambda x)$$

$$\| f_\lambda * g_\lambda \|_r = \left(\frac{1}{\lambda}\right)^d \left(\frac{1}{\lambda}\right)^{\frac{d}{r}} = \left(\frac{1}{\lambda}\right)^{d(1+\frac{1}{r})}$$

$$\| f_\lambda \|_p = \left(\frac{1}{\lambda}\right)^{\frac{d}{p}} \| f \|_p \qquad \| g_\lambda \|_q = \left(\frac{1}{\lambda}\right)^{\frac{d}{q}} \| g \|_q$$

d'où $\left(\frac{1}{\lambda}\right)^{d(1+\frac{1}{r})} \leq C \left(\frac{1}{\lambda}\right)^{d(\frac{1}{p}+\frac{1}{q})} \| f \|_p \| g \|_q$

nécessairement $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 + \frac{1}{r}$

57 Théorème (Inégalité de Young).

Soit $p \geq 1$, $q \geq 1$, $r \geq 1$ tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 + \frac{1}{r}$

Soit $f \in L^p$, $g \in L^q$. Alors.

1) $f * g$ est défini pp. $\left(\int |f(y) g(x-y)| dy < +\infty \right)$

2) $f * g \in L^r$

3) $\|f * g\|_r \leq \|f\|_p \|g\|_q$

4) $(f,g) \in L^p \times L^q \longmapsto f * g \in L^r$ est bilinéaire continue

(rem : on retrouve Minkowski : $p = 1$, $q = r$

preuve On note $\mathcal{D}$ les fonctions mesurables bornées à support compact : $\mathcal{D}$ dense de L^p $\forall p \in [1, +\infty[$

On cherche à obtenir l'inégalité par dualité. Soit $f, g \in \mathcal{D}$ et $h \in L^{r'}$ $\frac{1}{r} + \frac{1}{r'} = 1$

$$\left| \int f * g(x) \, h(x) \, dx \right| \leq \|f\|_p \|g\|_q \|h\|_{r'}$$

$$\|f * g\|_r = \sup_{\|h\|_{r'} \leq 1} \left| \int f * g(x) \, h(x) \, dx \right|$$

On cherche donc à estimer

$$(*) = \iint f(y) \, g(x-y) \, h(y) \, dx \, dy.$$

On peut supposer $f \geq 0$, $g \geq 0$, $h \geq 0$. On applique Hölder à $L^r \otimes L^{r'}$

$$(*) = \iint f^{\frac{p}{r}}(y) \, g^{\frac{q}{r}}(x-y) \quad f^{1-\frac{p}{r}}(x) \, g^{1-\frac{q}{r}}(x-y) \, h(y) \, dx dy$$

$$\leq \left[\iint f^p(y) g^q(x-y) \, dx dy \right]^{\frac{1}{r}}$$

$$\left[\iint f^{(1-\frac{p}{r})r'}(x) \, g^{(1-\frac{q}{r})r'}(x-y) \, h^{r'}(y) \, dx dy \right]^{\frac{1}{r'}}$$

Le premier $[\dots] = I_1$, le deuxième $[\dots] = I_2$

$I_1 = \|f\|_p^{p/r} \; \|g\|_q^{q/r}$

$I_2 = \| (f^{(1-\frac{p}{r})r'} * g^{(1-\frac{q}{r})r'}) h^{r'} \|_1^{1/r'}$

$\leq \| f^{(1-\frac{p}{r})r'} * g^{(1-\frac{q}{r})r'} \|_\infty^{1/r'} \|h\|_{r'}$

on cherche deux exposants conjugués.

(1) $\frac{1}{s} + \frac{1}{t} = 1$

tels que $\begin{cases} s(1-\frac{p}{r})r' = p \\ t(1-\frac{q}{r})r' = q \end{cases} \Leftrightarrow (2) \begin{cases} \frac{1}{p} = \frac{1}{r} + \frac{1}{sr'} \\ \frac{1}{q} = \frac{1}{r} + \frac{1}{tr'} \end{cases}$

(2) definit (s,t) de manière unique et $\frac{1}{r} + \frac{1}{r'} = 1$ entraine (1).

$I_2 \leq \|f\|_p^{p/sr'} \|g\|_q^{q/tr'} \|h\|_{r'}$

(*) $\leq I_1 I_2 \leq \|f\|_p^{\frac{p}{r} + \frac{p}{sr'}} \|g\|_q^{\frac{q}{r} + \frac{q}{tr'}} \|h\|_{r'}$

$\frac{p}{r} + \frac{p}{sr'} = 1 \qquad \frac{q}{r} + \frac{q}{tr'} = 1.$

conclusion, $\forall f,g \in \mathcal{D} \quad \|f*g\|_r \leq \|f\|_p \|g\|_q$

Par Beppo-Levi $f \in L^p, g \in L^q, f \geq 0, g \geq 0$

$f = \lim_{n \to +\infty} \uparrow \mathbb{1}_{(\|x\| \leq N)} \min(N, f)$

$\int \left(\int f(y) g(x-y) dy \right)^r dx \leq \|f\|_p^r \|g\|_q^r < +\infty$

$f*g(x)$ existe p.p., $f*g \in L^r$ et $\|f*g\|_r \leq \|f\|_p \|g\|_q$