III. 5 Régularisation

58 **Proposition** Il existe une fonction $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ ($\mathcal{C}^\infty$ à support compact) $\rho : \mathbb{R}^d \to [0,1]$ telle que

$$\begin{cases} \forall\ \|x\|<1 & \rho(x) \in]0,1] \\ \forall\ \|x\| \geq 1 & \rho(x) = 0 \end{cases}$$

preuve Etape 1) On commence par $h : \mathbb{R} \to [0,1]$ $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ telle que

$$\begin{cases} \forall\ x>0 & h(x) \in]0,1] \\ \forall\ x\leq 0 & h(x) = 0. \end{cases} \qquad (\mathrm{supp}(h) = [0,+\infty[)$$

On pose $h(x) = \frac{1}{x^2}\exp\left(-\frac{1}{x}\right)$ pour $x>0$ et $h(x)=0$ pour $x \leq 0$. Alors on vérifie par récurrence pour tout $x>0$

1) $h^{(n)}(x) = \frac{P_n(x)}{x^{2n+2}}\exp\left(-\frac{1}{x}\right)$ $\quad \deg(P_n(x)) = n$.

2) $\lim_{x \to 0^+} h^{(n+1)}(x) = 0$

3) $\lim_{x\to 0} \frac{h^{(n)}(x)}{x} = 0$

et donc $h \in \mathcal{C}^\infty$ avec $\mathrm{supp}(h) = [0,+\infty[$.

$$h^{(n+1)}(x) = \frac{x^2 P_n'(x) - ((2n+2)x+1)P_n(x)}{x^{2n+4}}\exp\left(-\frac{1}{x}\right)$$

Si a_n est le coefficient de x^n dans $P_n(x)$,

$$a_{n+1} = (n-2n-2)a_n = -(n+2)a_n$$

2) $\rho(x) = h(1-\|x\|^2)$ où $\|x\|^2 = \sum_{i=1}^d x_i^2$.
alors ρ est $\mathcal{C}^\infty$ et à support égal à la boule $B(x,1)$.

59 **Remarque** $\rho_{a,r}(x) = \rho\left(\frac{x-a}{r}\right)$ à support $= B(a,r)$.

60 **Lemme** Si $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$ et $\rho \in \mathcal{C}^\infty_c(\mathbb{R}^d)$ alors.

$\rho * f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^d)$. Si f est à support compact $\rho * f \in \mathcal{C}^\infty_c$

preuve la démonstration se fait par récurrence sur l'ordre de dérivabilité.

$$F(x,y) = f(y)\,\rho(x-y)$$

1) $\forall x$ $y \mapsto F(x,y) \in L^1$

2) $\forall y$ $x \mapsto F(x,y)$ est dérivable sur $B(x_0,\varepsilon)$.

$$\frac{\partial F}{\partial x_1}(x,y) = f(y)\frac{\partial \rho}{\partial x_1}(x-y) \qquad K = \operatorname{supp}(\rho)$$

3) $$\sup_{B(x_0,\varepsilon)}\left|\frac{\partial F}{\partial x_1}(x,y)\right| \leq \left\|\frac{\partial \rho}{\partial x_1}\right\|_\infty f(y)\, \mathbb{1}_{\overline{B(x_0,1)-K}}(y) \in L^1.$$

on peut appliquer le th de dérivation sous le signe $\int$. ∎

objectif Introduire un espace mieux adapté à la transformée de Fourier contenant par exemple la gaussienne.

$$\begin{cases} \rho(x) = \left(\dfrac{1}{2\pi}\right)^{\frac{d}{2}} \exp\left(-\dfrac{\|x\|^2}{2}\right) \\ \int \rho\, dx = 1 \end{cases}$$

61 **Definition** on : définit une famille de semi-norme.

$$P_{\alpha,\beta}(f) = \sup_{x\in\mathbb{R}^d} |x^\alpha \partial^\beta f(x)| \qquad \forall f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^d)$$

$\alpha = (\alpha_1 \ldots \alpha_d) \in \mathbb{N}^d$ $\quad \beta = (\beta_1 \ldots \beta_d) \in \mathbb{N}^d$

$$x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \ldots x_d^{\alpha_d} \qquad \partial^\beta f = \left(\frac{\partial^{\beta_1}}{\partial x_1^{\beta_1}} \cdots \frac{\partial^{\beta_d}}{\partial x_d^{\beta_d}}\right) f.$$

on appelle espace de Schwarz :

$$\mathcal{S} = \{ f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^d) \,.\, \forall \alpha,\beta \quad P_{\alpha,\beta}(f) < +\infty \}$$

62 Exemple La gaussienne est dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$.

preuve $\rho(x) = \exp(-\|x\|^2) = \prod_{i=1}^{d} \exp(-x_i^2)$

$$x^\alpha \partial^\beta \rho(x) = \prod_{i=1}^{d} x_i^{\alpha_i} \frac{\partial^{\beta_i}}{\partial x_i^{\beta_i}}\left(\exp(-x_i^2)\right)$$

Par récurrence on montre

$$\frac{d^n}{dx^n}(\exp(-x^2)) = H_n(x)(-1)^n \exp(-x^2)$$

H_n = polynôme d'Hermite

La famille $\left(\frac{1}{2^n n! \sqrt{\pi}}\right)^{1/2} H_n(x) \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)$

est une base de $L^2(\mathbb{R})$ orthonormée.

63 Remarque On choisit des fois une autre famille de norme :

$$\tilde{p}_{m,n}(x) = \sup_{x \in \mathbb{R}^d} (1+\|x\|^2)^m \sum_{|\beta| \leq n} \left|\frac{\partial^\beta f}{\partial x^\beta}\right|(x)$$

Alors $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d) = \{ f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^d),\ \forall m,n \geq 0\ \ \tilde{p}_{m,n}(f) < +\infty \}$

preuve

D'une part $|x_i| \leq 1 + \|x\|^2$

et donc $p_{\alpha,\beta}(f) \leq \tilde{p}_{|\alpha|,|\beta|}(f)$.

D'autre part

$$1 + \|x\|^2 \leq \sum_{|\alpha| \leq 1} |x_i|^{2\alpha_i}$$

$$\tilde{p}_{m,n}(f) \leq \sup_{x \in \mathbb{R}^d} \Big(\sum_{|\alpha| \leq 1} |x_i|^{2\alpha_i}\Big)^m \sum_{|\beta| \leq n} |\partial^\beta f|(x)$$

$\blacksquare$

64 **Lemme** $\forall p \in [1,+\infty[\cup \{+\infty\}$ $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \subset L^p(\mathbb{R}^d)$.

preuve Soit $f \in \mathcal{S}$

$$f(x) = \left(\prod_{i=1}^{d} \frac{1}{1+|x_i|^2}\right)\left(\prod_{i=1}^{d}(1+x_i^2)\right) f(x).$$

$$M = \sup_{x\in\mathbb{R}^d} \left(\prod_{i=1}^{d}(1+x_i^2)\right)|f(x)|$$

$$\int |f(x)|\,dx \leqslant M \prod_{i=1}^{d} \int \frac{dx}{1+x^2} = M\pi^d$$ ∎

65 **Lemme** Soit $p \in [1,+\infty[\cup \{\infty\}$, $f \in L^p$, $g \in \mathcal{S}$

Alors $f * g \in \mathcal{C}^\infty$

preuve on cherche à dériver sous le signe $\int$.

$$\partial^\alpha (f*g)(x) = \int f(y)\, \partial^\alpha g(x-y)\,dy.$$

$$F(x,y) = f(y) \quad g(x-y)$$

$$\partial_x^\alpha F(x,y) = \frac{f(y)}{(1+\|y\|^2)^d}\left(\frac{1+|y|^2}{1+|x-y|^2}\right)^d (1+|x-y|^2)^d \partial^\alpha g(x-y)$$

Pour $|x|<R$ $\left(\frac{1+|y|^2}{1+|x-y|^2}\right)^d \leqslant (1+4R^2)^d \vee 4^d = M$

(ou bien $\|y\| \leqslant 2R$, et $1+|x-y|^2 \geqslant 1$

ou bien $\|y\| > 2R$, et $1+\|x-y\|^2 \geqslant 1+R^2 \geqslant \frac{1}{2}(1+\|y\|^2)$.)

d'où $$\sup_{\|x\|<R} |\partial_x^\alpha F(x,y)| \leqslant \frac{|f(y)|}{(1+\|y\|^2)^d} M \sup_x (1+\|x\|^2)^d |\partial^\alpha g(x)|$$

de plus $f \in L^p$ et $y \longmapsto \frac{1}{(1+\|y\|^2)^d} \in L^q$

$$(1+\|y\|^2)^d \geqslant \prod_{i=1}^{d}(1+|y_i|^2)$$ et $$\int \frac{dy}{(1+y^2)^q} < +\infty$$ ∎

66 Lemme Soit $p \in [1,+\infty[$, $f \in L^p$, $g \in \mathcal{S}$.
On suppose que $(1+\|y\|^2)^m f(y) \in L^p$ pour tout $m \geq 0$.
Alors $f * g \in \mathcal{S}$.

preuve Il suffit de montrer $(1+\|x\|^2)^m f*g(x) \in L^\infty$

$$f(y)\,g(x-y)\,(1+\|x\|^2)^m$$
$$= (1+\|y\|^2)^m f(y) \left(\frac{1+\|x\|^2}{(1+\|y\|^2)(1+\|x-y\|^2)}\right)^m (1+\|x-y\|^2)^m g(x-y)$$

on utilise la minoration.

$$(1+a^2)(1+b^2) \geq \frac{1}{2}(1+(a+b)^2)$$

$$|f(y)g(x-y)(1+\|x\|^2)^m| \leq 2^m \sup_x (1+\|x\|^2)^m |g(x)| \, (1+\|y\|^2)^m |f(y)|$$

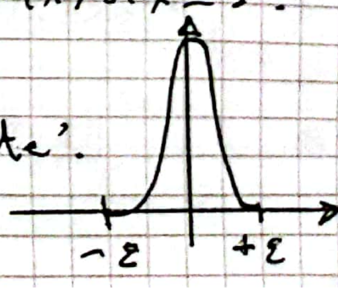
$$y \mapsto (1+\|y\|^2)^m |f(y)| \in L^1$$

$$(1+\|y\|^2)^m |f(y)| = \underbrace{(1+\|y\|^2)^{m+d} |f(y)|}_{\in L^p} \underbrace{\frac{1}{(1+\|y\|^2)^d}}_{\in L^q}$$

67 Définition On appelle approximation de l'unité $(\rho_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$: $\mathbb{R}^d \to [0,+\infty[$ des fonctions C^∞ vérifiant.

1) $\int \rho_\varepsilon(x)\,dx = 1 \quad \forall \varepsilon > 0$.
2) $\forall \eta > 0 \quad \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\|x\| > \eta} \rho_\varepsilon(x)\,dx = 0$.

68 Exemple Soit $\rho : \mathbb{R}^d \to [0,+\infty[$ C^∞ $\int \rho(x)\,dx = 1$.
On pose $\rho_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon^d}\rho\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$
Alors $(\rho_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ est une approximation de l'unité.



preuve

$$\int \rho_\varepsilon(x)\,dx = \int \frac{1}{\varepsilon^d}\rho\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)dx = \int \rho(x)\,dx = 1$$

$$\int_{\|x\|>r} \rho_\varepsilon(x)\,dx = \int_{\|x\|>\frac{r}{\varepsilon}} \rho(x)\,dx \longrightarrow 0$$

Par le théorème de convergence dominée. ■

69 **Théorème 69** Soit $p\in[1,+\infty[$, $f\in L^p$ et $(\rho_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ une approximation de l'unité. Alors $\rho_\varepsilon * f \to f$ dans L^p

preuve On utilise le résultat

$\forall p\in[1,+\infty[\ \forall f\in L^p$ $a\in\mathbb{R}^d \mapsto \tau_a f\in L^p$ est continue

on sait déjà : $\rho_\varepsilon\in L^1, f\in L^p \Rightarrow \rho_\varepsilon * f\in L^p$

$$f(x) - \int f(x-y)\rho_\varepsilon(y)\,dy$$

$$= \int [f(x)-f(x-y)]\rho_\varepsilon(y)\,dy$$

$$|f(x)-f*\rho_\varepsilon(x)| \leq \int |f(x)-f(x-y)|\,\rho_\varepsilon^{\frac{1}{p}}(y)\,\rho_\varepsilon^{\frac{1}{q}}(y)\,dy$$

$$|f(x)-f*\rho_\varepsilon(x)|^p \leq \int |f(x)-f(x-y)|^p \rho_\varepsilon(y)\,dy.\ \left[\int \rho_\varepsilon(y)\,dy\right]^{\frac{p}{q}}$$

$$= \int |f(x)-f(x-y)|^p \rho_\varepsilon(y)\,dy$$

$$\int |f(x)-f*\rho_\varepsilon(x)|^p\,dx \leq \int \rho_\varepsilon(y)\,\|f-\tau_y f\|_p^p\,dy$$

$$\leq \int_{\|y\|\geq r} \cdots + \int_{\|y\|\leq r} \cdots$$

$$\int_{\|y\|\geq r} \rho_\varepsilon(y)\,\|f-\tau_y f\|_p^p\,dy \leq 2^p\|f\|_p^p \underbrace{\int_{\|y\|>r}\rho_\varepsilon(y)\,dy}_{\longrightarrow 0}$$

$$\int_{\|y\|\leq r} \rho_\varepsilon(y)\,\|f-\tau_y f\|_p^p\,dy \leq \sup_{\|y\|<r}\|f-\tau_y f\|_p^p \xrightarrow[r]{} 0$$ ■

(67)

10 Corollaire Pour tout $p \in [1,+\infty[$, l'ensemble $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ est dense dans $L^p(\mathbb{R}^d)$.

Preuve Soit $f \in L^p$ et $\varepsilon > 0$. On note

$$f_R(x) = f(x)\, \mathbb{1}_{\|x\| \leq R}$$

Alors $$\lim_{R\to+\infty} \| f - f_R \|_p = 0$$

De plus si $(\rho_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ est une approximation de l'unité à support compact.

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \| f_R - f_R * \rho_\varepsilon \|_p = 0$$

On conclut $$\operatorname{supp}(\rho_\varepsilon * f_R) = \overline{B(0,R)} + \operatorname{supp}(\rho_\varepsilon).$$

Théorème Si $f \in \mathcal{C}_0^0(\mathbb{R}^d)$ et $(\rho_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ est une approximation de l'unité alors $f * \rho_\varepsilon \to f$ uniformément.

Preuve Comme $f \in L^\infty$ et $\rho_\varepsilon \in L^1$, on sait déjà que $f * \rho_\varepsilon \in \mathcal{C}_b^0$
En fait on va montrer que $f * \rho_\varepsilon \in \mathcal{C}_0^0(\mathbb{R}^d)$
Soit $\eta > 0$. Il existe $R \geq 1$ tel que $\sup_{\|x\| \geq R-1} |f(x)| \leq \eta$
Par uniforme continuité sur $B(0,R+1)$, il existe $r \in (0,1)$,

$$\forall \|y\| \leq r \ \forall x \in B(0,R) \ |f(x-y) - f(x)| < \eta.$$

Soit $\varepsilon_0 > 0$ tel que $\int_{\|x\| \geq r} \rho_\varepsilon(x)\,dx < \eta$, $\forall \varepsilon \leq \varepsilon_0$,

$$\begin{aligned}
|(f * \rho_\varepsilon - f)(x)| &\leq \int |f(x-y) - f(x)|\, \rho_\varepsilon(y)\,dy \\
&\leq \int_{\|y\| \leq r} + \int_{\|y\| > r} \\
&\leq 2\|f\|_\infty \int_{\|y\| \geq r} \rho_\varepsilon(y)\,dy \\
&\quad + \sup_{\|y\| \leq r} |f(x-y) - f(x)|
\end{aligned}$$

Pour $\|x\| \leq R$ $\quad |(f * \rho_\varepsilon - f)(x)| \leq (2\|f\|_\infty + 1)\eta.$

$\|x\| \geq R$ $\quad |(f * \rho_\varepsilon - f)(x)| \leq 2(\|f\|_1 + 1)\eta$