# II Espaces $L^p$

## II.1 Définitions

1 Notation $(X, \mathcal{A})$ un espace mesurable, $\mathcal{A}$ $\sigma$-algèbre, $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré, $\mu$ mesure (positive) $\sigma$-finie
$\exists (A_n)_{n \geq 0}$ une suite croissante de mesurables tels que

$$\bigcup_{n \geq 0} A_n = X, \quad \forall n \geq 0 \; \mu(A_n) < +\infty.$$

Des fois c'est commode de se ramener à une mesure de proba en localisant la preuve sur $A_n$ et en posant $\mu_n = \mathbb{1}_{A_n} \dfrac{\mu}{\mu(A_n)}$.

Les questions de mesurabilité sont souvent traitées par le théorème suivant (facile).

2. Théorème (des classes monotones)

1) Soit $\mathcal{I}$ un ensemble de parties stable par $\cap$ finie et $\mathcal{M}$ un ensemble de parties vérifiant

   1) $\emptyset$ et $X$ sont dans $\mathcal{M}$
   2) $\mathcal{M}$ stable par différence propre
   $$A, B \in \mathcal{M}, \quad A \subset B \Rightarrow B \setminus A \in \mathcal{M}$$
   3) $\mathcal{M}$ stable par union croissante.

Alors $\mathcal{M}$ contient la $\sigma$-algèbre engendrée par $\mathcal{I}$

2) Soit $\mathcal{I}$ une algèbre et $\mathcal{M}$ un ensemble de parties de $X$ vérifiant

   1) $\emptyset, X$ sont dans $\mathcal{M}$
   2) $\mathcal{M}$ est stable par union croissante et décroissante

Alors $\mathcal{M}$ contient la $\sigma$-algèbre engendrée par $\mathcal{I}$.

3 Exemple Soient $(X, \mathcal{A})$, $(Y, \mathcal{B})$ deux espaces mesurables. Si $f : X \times Y \to \mathbb{R}$ est mesurable pour $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$, alors

1) $\forall x \in X$, $y \mapsto f(x,y)$ est mesurable pour $\mathcal{B}$

2) $\forall y \in Y$ $x \mapsto f(x,y)$ est mesurable pour $\mathcal{A}$

Autre exemple : égalité des proba sur $Y$.

Autre exemple : régularité des mesures de proba ds les espaces métriques

4. Définition $(X, \mathcal{A}, \mu)$ espace mesuré, $p \in [1, +\infty[$

1) $\mathcal{L}^p(X, \mathcal{A}, \mu) = \{ f : X \to \mathbb{R}$ mesurable t.q. $\int |f(x)|^p d\mu(x) < +\infty \}$.

2) On définit une relation d'équivalence sur $\mathcal{L}^p$

$$f \sim g \iff f = g \quad \mu\text{-p.p.}$$
$$\iff \mu(\{ x : f(x) \neq g(x) \}) = 0$$

3) $L^p = \mathcal{L}^p / \sim$

4) On définit une norme (on le verra plus tard) sur $L^p$

$$\|f\|_p = \left[ \int |f(x)|^p d\mu(x) \right]^{\frac{1}{p}}$$

$$\|f+g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$$

On verra bientôt que $L^p$ est un e.v.n et que $\|\cdot\|_p$ est une norme

5 Définition $(X, \mathcal{A}, \mu)$ espace mesuré $\sigma$-fini, $p = +\infty$

1) $\mathcal{L}^\infty(X, \mathcal{A}, \mu) = \{ f : X \to \mathbb{R}$ mesurable t.q. $\inf \left\{ \sup_{Y} |f| ; \; Y \subseteq X, \; \mu(X \setminus Y) = 0 \right\} < +\infty \}$

2) On définit une relation d'équivalence

$$f \sim g \iff f = g \quad \mu\text{-p.p.}$$

3) $L^\infty(X, \mathcal{A}, \mu) = \mathcal{L}^\infty(X, \mathcal{A}, \mu) / \sim$

4) norme du sup essentiel

$$\|f\|_\infty = \inf \{ \sup_Y |f| : Y \subseteq X, \mu(X \setminus Y) = 0 \}$$

il est évident que $L^\infty$ est une e.v.n. et $\|\cdot\|_\infty$ une norme

Rem Dans les 2 cas, $L^1$, $L^\infty$, $f$ est une classe d'équivalence (27)

↓ par exemple $f$ et $f + \mathbb{1}_{\mathbb{Q}}$ sont égales dans $L^\infty$

6 Exemple : la mesure de comptage sur $\mathbb{N}$

$X = \mathbb{N}$ $\quad \mu(B) = \mathrm{card}(B) \quad \forall B \subseteq X$ est la mesure de comptage

$f : X \to \mathbb{R}$ est une suite

$f \in L^1 \iff \sum_{n \geq 0} |f(n)| < +\infty$

$\iff$ la série est absolument convergente

7 Exemple [Bienaymé Tchebychev]

Si $f \in L^p(X)$, $p \in [1, +\infty[$,

$$\mu(\{|f| > \lambda\}) \leq \frac{\int |f|^p d\mu}{\lambda^p}.$$

preuve $\quad \mathbb{1}_{\{|f| > \lambda\}} \leq \frac{|f|^p}{\lambda^p}$

8 Exemple (presque une réciproque de Bienaymé-Tcheb.)

Si $f \in L^p$, $p \in [1, +\infty[$

$$\|f\|_p^p = \int_0^{+\infty} p t^{p-1} \mu(|f| \geq t) dt$$

preuve on peut supposer $f \geq 0$ p.p.

$$\int f^p(x) \, d\mu(x) = \int \left( \int_0^{f(x)} p t^{p-1} dt \right) d\mu(x).$$

Fubini à $g(t, x) = \mathbb{1}_{(0 \leq t \leq f(x))} p t^{p-1}$

$$\int f^p(x) \, d\mu(x) = \int_0^{+\infty} \left( \int \mathbb{1}_{(0 \leq t \leq f(x))} d\mu(x) \right) p t^{p-1} dt$$

9 Comparaison des $L^p$

1) les $(\ell^p)_{p \geq 1}$ sont croissants : $p < p' \Rightarrow \ell^p \subseteq \ell^{p'}$

2) les $(L^p \cap L^\infty)_{p \geq 1}$ sont croissants.

$p < p' \Rightarrow L^p \cap L^\infty \subseteq L^{p'} \cap L^\infty$

3) Si $\mu$ est de masse finie les $(L^p)_{p\geq 1}$ sont décroissant : $p < p' \Rightarrow L^{p'} \subseteq L^p$

preuve 1) On montre d'abord $L^p \subset L^\infty$

$\forall n \geq 0 \quad |x_n| \leq \|x\|_p \qquad x = (x_n)_{n\geq 0}$

d'où $\|x\|_\infty \leq \|x\|_p$. Si $p' > p$ et $\|x\|_p < +\infty$

$|x_n|^{p'} \leq |x_n|^p |x_n|^{p'-p} \leq |x_n|^p \|x\|_\infty$.

d'où $\|x\|_{p'} \leq \|x\|_p \|x\|_\infty$

2) Soient $p' > p$ et $f \in L^p \cap L^\infty$

$$\int |f|^{p'} d\mu = \int |f|^{p'-p} |f|^p d\mu$$
$$\leq \|f\|_\infty^{p'-p} \|f\|_p^p$$

3) Soit $p' > p$ et $f \in L^{p'}$

$$\int |f|^p d\mu = \int_{(|f|\leq 1)} |f|^p d\mu + \int_{(|f|>1)} |f|^p d\mu$$
$$\leq \mu(|f|\leq 1) + \int_{(|f|>1)} |f|^{p'} d\mu$$

(on verra l'inégalité de Hölder plus loin qui permet d'obtenir $\|f\|_p \leq \|f\|_{p'}$.

$$\int |f|^p d\mu = \int |f|^p \mathbb{1}\, d\mu$$
$$\leq \left[\int |f|^{p'} d\mu\right]^{\frac{p}{p'}} \left[\int \mathbb{1}^{p'/(p'-1)} d\mu\right]^{\frac{p'-p}{p'}}$$

L'exposant conjugué de $\frac{p'}{p} = q$ est $\frac{q}{q-1}$

$\left(\frac{p'}{p} - 1\right) / \frac{p'}{p} = \frac{p'-p}{p'}$ )

$\blacksquare$