II.2 Inégalités de Hölder et Minkowski

10 **Théorème** (Inégalité de Hölder)

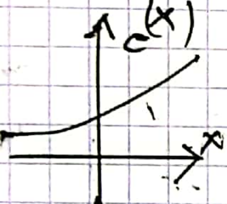
Soient $p \in]1,+\infty[$ et q l'exposant conjugué

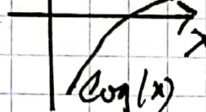
$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

Soient $f \in L^p$, $g \in L^q$. Alors $fg \in L^1$ et

$$\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q$$

11 **Propriété de convexité** soit $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervalle et $\varphi : I \to \mathbb{R}$ une fonction convexe :



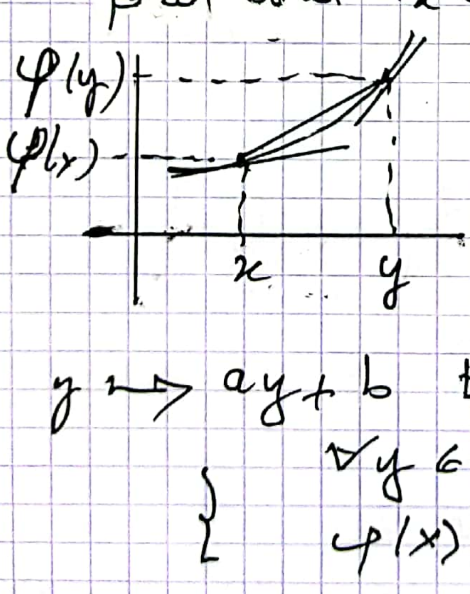


$\forall \alpha \in [0,1]$ $\forall x, y \in I$

$$\varphi(\alpha x + (1-\alpha) y) \leq \alpha \varphi(x) + (1-\alpha) \varphi(y)$$

1) φ est continue sur l'intérieur de I

2) φ admet des dérivées à droite et à gauche en tout point intérieur, $\varphi'_d(x)$, $\varphi'_d(y)$, et pour tout $x < y$ points intérieurs



$$f'_d(x) \leq \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \leq f'_g(y)$$

3) Pour tout point intérieur x il existe une droite affine $y \mapsto ay + b$ telle que

$$\begin{cases} \forall y \in I & \varphi(y) \geq ay + b \\ \varphi(x) = ax + b. \end{cases}$$

Définition $\varphi : I \to \mathbb{R}$ est strictement convexe si

$$\begin{cases} \forall \alpha \in]0,1[& \varphi(\alpha x + (1-\alpha) y) < \alpha \varphi(x) + (1-\alpha) \varphi(y). \\ \forall x \neq y \end{cases}$$

12 Critère simple (de convexité)

Si $f : I \to \mathbb{R}$ est deux fois dérivable en tout point d'un intervalle ouvert I et si $f''(x) \geq 0$ $\forall x \in I$, alors f est convexe. Si de plus $f''(x) > 0$, $\forall x \in I$, alors f est strictement convexe.

Exemple [Inégalité de Young]

13 Preuve de Hölder (première preuve).

On connait $\quad xy \leq \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^2 \quad \forall x, y > 0$

plus généralement, si $p \in]1, +\infty[$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$

alors $\quad \boxed{xy \leq \frac{1}{p}x^p + \frac{1}{q}x^q.}$ inégalité de Young.

En effet en posant $\quad u = x^p$ et $v = \cancel{x}^q$,

il revient à montrer

$$u^{\frac{1}{p}} v^{\frac{1}{q}} \leq \frac{1}{p}u + \frac{1}{q}v$$

$$\iff \frac{1}{p}\log u + \frac{1}{q}\log v \leq \log\left(\frac{1}{p}u + \frac{1}{q}v\right)$$

qui est vrai grâce à la concavité de log.

On peut supposer dans la preuve de Hölder

$$\|f\|_p > 0, \quad \|g\|_q > 0$$

$$\int \frac{f}{\|f\|_p} \frac{g}{\|g\|_q} d\mu$$

$$\leq \int \left(\frac{1}{p}\left[\frac{f}{\|f\|_p}\right]^p + \frac{1}{q}\left[\frac{g}{\|g\|_q}\right]^q\right) d\mu$$

$$= 1.$$

14 Cas d'égalité

Si $f \in L^1$ et $\quad \left|\int f d\mu\right| = \int |f| d\mu$

alors $\exists \theta \in \mathbb{R}$ t.q. $\quad f(x) = e^{i\theta}|f(x)| \quad$ p.p.

preuve $\int f d\mu = e^{i\theta} \left| \int f d\mu \right|$

$\left|\int f d\mu\right| = \int |f| d\mu$

$\Rightarrow \int (|f| - e^{-i\theta} f) d\mu = 0.$

$\Rightarrow \begin{cases} \int [|f| - Re(e^{-i\theta} f)] d\mu = 0 \\ \int [\quad - Im(e^{-i\theta} f)] d\mu = 0. \end{cases}$

comme $Re(e^{-i\theta} f) \leq |f|$ necessairement pour presque tout x

$Re(e^{-i\theta} f) = |f(x)| = \sqrt{Re(e^{-i\theta} f)^2 + Im(e^{-i\theta} f)^2}$

$Im(e^{-i\theta} f) = 0$ p.p.

$e^{-i\theta} f(x) = Re(e^{-i\theta} f(x)) = |f(x)|.$

$f(x) = e^{i\theta} |f(x)| \ldots$

15. Cas d'egalité ($p \in]1, +\infty[$, $q \in]1, +\infty[$)

Soit $p \in]1, +\infty[$ et $f \in L^p$, $g \in L^q$. Supposons $\left|\int fg d\mu\right| = \|f\|_p \|g\|_q$ et $\|f\|_p > 0$, $\|g\|_q > 0$

Alors $|g| = \lambda |f|^{p-1} \Leftrightarrow |g|^q = \lambda^q |f|^p$ pour une certaine constante $\lambda \geq 0$.

preuve Comme

$\left|\int fg d\mu\right| \leq \int |f| \cdot |g| d\mu \leq \|f\|_p \|g\|_q$

on a le cas d'egalité dans.

$\int \frac{|f|}{\|f\|_p} \frac{g}{\|g\|_q} d\mu = 1 = \int \frac{1}{p} \left(\frac{|f|}{\|f\|_p}\right)^p + \frac{1}{q} \left(\frac{|g|}{\|g\|_q}\right)^q$

En utilisant l'inegalite de Young.

$$\frac{|f|}{\|f\|_p}\frac{|g|}{\|g\|_q} = \frac{1}{p}\left(\frac{|f|}{\|f\|_p}\right)^p + \frac{1}{q}\left(\frac{|g|}{\|g\|_q}\right)^q \quad p.p.$$

En posant $u = \left(\frac{|f|}{\|f\|_p}\right)^p$ $v = \left(\frac{|g|}{\|g\|_q}\right)^q$

on a le cas d'égalité dans

$$u^{\frac{1}{p}} v^{\frac{1}{q}} = \frac{1}{p}u + \frac{1}{q}v \quad p.p.$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{p}\log u + \frac{1}{q}\log v = \log\left(\frac{1}{p}u + \frac{1}{q}v\right) \quad p.p.$$

par stricte convexité $u = v$ p.p.

$$\frac{|f|^p}{\|f\|_p^p} = \frac{|g|^q}{\|g\|_q^q}.$$

16 Cas d'égalité $(p = 1, q = +\infty)$ ~~$\|f\|_\infty > 0$~~

Soit $f \in L^1$ $g \in L^\infty$. Supposons ~~$\|g\|_\infty > 0$~~ et

$$\left|\int fg \, d\mu\right| = \|f\|_1 . \|g\|_\infty$$

Alors $|g| = \|g\|_\infty$ p.p. sur $\{f \neq 0\}$.

preuve Supposons $\|g\|_\infty > 0$. (Sinon c'est trivial)

le cas d'égalité entraîne

$$\int |f| \left[1 - \frac{|g|}{\|g\|_\infty}\right] d\mu = 0$$

$$1 - \frac{|g|}{\|g\|_\infty} = 0 \quad \mu\text{-p.p. là où } |f| \neq 0$$

← Théorème de Minkowski $\left[\|f+g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p\right]$ $(L^p, \|\cdot\|_p)$ est un e.v.n.

17 complément à Hölder. Soit $r \geq 1$ et $p, q \in]1, +\infty[$

tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r}$. Soit $f \in L^p$ et $g \in L^q$

alors $fg \in L^r$ et

$$\|fg\|_r \leq \|f\|_p \|g\|_q$$

preuve

$$\int |f+g|^p d\mu$$
$$= \int |f+g|^{p-1} |f+g| \, d\mu$$
$$\leq \int |f+g|^{p-1}|f| + \int |f+g|^{p-1}|g|$$

preuve

$$\frac{r}{p} + \frac{r}{q} = 1$$

$$\int (|f|^r)^{\frac{p}{r}} d\mu < +\infty \qquad \int (|g|^r)^{\frac{q}{r}} d\mu < +\infty$$

$$\int |fg|^r d\mu \leq \left(\int |f|^p d\mu\right)^{\frac{r}{p}} \left(\int |g|^q d\mu\right)^{\frac{r}{q}}$$

$$\|fg\|_r \leq \|f\|_p \|g\|_q.$$ ■

18 Complément à Hölder Soient $p_1 \dots p_n \in]1, +\infty[$

tels que $\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \dots + \frac{1}{p_n} = 1$

Soient $f_1 \in L^{p_1}, f_2 \in L^{p_2}, \dots, f_n \in L^{p_n}$.

Alors $f_1 \dots f_n \in L^1$ et $\|f_1 \dots f_n\|_1 \leq \prod_{i=1}^{n} \|f_i\|_{p_i}$

preuve: Par récurrence sur n.

$\mathcal{P}(n)$ $\quad \frac{1}{r} = \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \dots + \frac{1}{p_n}$

$\Rightarrow \quad \|\prod_{i=1}^{n} f_i\|_r \leq \prod_{i=1}^{n} \|f_i\|_{p_i}$

vraie à l'ordre 2.

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{p_1} + \left(\frac{1}{p_2} + \dots + \frac{1}{p_{n+1}}\right) = \frac{1}{p_1} + \frac{1}{q}.$$

$$\|f_2 \dots f_{p_{n+1}}\|_q \leq \prod_{i=2}^{n+1} \|f_i\|_{p_i}$$

$$\|f_1 (f_2 \dots f_{n+1})\|_r \leq \|f_1\|_{p_1} \|f_2 \dots f_{n+1}\|_q$$

19 Inégalité de Jensen

Soient I un intervalle, $\varphi : I \to \mathbb{R}$ une fonction convexe et $f : X \to I$ une fonction mesurable.

On suppose que μ est une mesure de probabilité et que f est intégrable. Alors

1) $(\varphi\circ f)^- \in L^1$ ($\Rightarrow \int \varphi\circ f\,d\mu$ a un sens)

$\int f\,d\mu \in I$ $\quad \varphi\left(\int f\,d\mu\right) \leq \int \varphi\circ f\,d\mu$

2) On suppose de plus que f est non constante pp et que φ est strictement convexe. Alors

$$\int f\,d\mu \in \mathrm{int}(I)$$

$$\varphi\left(\int f\,d\mu\right) < \int \varphi\circ f\,d\mu$$

preuve 1) Si f est constante pp égale à $f_* \in I$ alors $\int f\,d\mu = f_*$, $\int \varphi\circ f\,d\mu = \varphi(f_*)$ et l'inégalité est évidente.

On suppose donc que f est non constante pp.

On montre d'abord $\int f\,d\mu \in \mathrm{int}(I)$. Supposons par exemple $\bar{I} =]-\infty, b]$ et par l'absurde $\int f\,d\mu = b$.

Alors $\int (b - f)\,d\mu = 0$ et $b \geq f$ donc $b = f$ pp.

Les autres cas $\bar{I} = [a, +\infty[$, $\bar{I} = [a, b]$, $\bar{I} =]-\infty, +\infty[$ sont traités de la même manière.

On pose $f_* = \int f\,d\mu \in \mathrm{int}(I)$. Par convexité il existe α, β tel que

$$\begin{cases} \varphi(t) \geq \alpha t + \beta \\ \varphi(f_*) = \alpha f_* + \beta \end{cases} \Rightarrow \int (\varphi\circ f)\,d\mu > -\infty$$

Alors

$$\int \varphi\circ f\,d\mu \geq \alpha \int f\,d\mu + \beta = \alpha f_* + \beta = \varphi(f_*)$$

2) On suppose φ strictement convexe. Comme $f_* \in \mathrm{int}(I)$ $\quad \varphi(t) > \alpha t + \beta$ pour tout $t \neq f_*$

$$\int [\varphi\circ f - (\alpha f + \beta)]\, d\mu$$

$$= \int_{(f \neq f_*)} [\varphi\circ f - (\alpha f + \beta)]\, d\mu > 0.$$

$\mu(f \neq f_*) > 0$

20 Preuve de Hölder (Deuxième preuve → voir 13)

On peut supposer à nouveau $\|f\|_p > 0$, $\|g\|_q > 0$.
On cherche à montrer

$$\int |fg|\, d\mu \leq \|f\|_p \|g\|_q$$

$$\Leftrightarrow \int |f| \frac{|g|}{\|g\|_q^q}\, d\mu \leq \frac{\|f\|_p}{\|g\|_q^{q-1}}$$

$$\Leftrightarrow \left(\int \frac{|f|}{|g|^{q-1}} \frac{|g|^q}{\|g\|_q^q} 1\!\!1_{|g|>0}\, d\mu \right)^p \leq \int \frac{|f|^p}{\|g\|_q^q}\, d\mu$$

La mesure $1\!\!1_{|g|>0} \frac{|g|^q}{\|g\|_q^q}\, d\mu = d\nu$ est de proba

$\varphi(x) = x^p$ est strictement convexe sur $[0, +\infty[$

$$\varphi''(x) = p(p-1)x^{p-2}$$

D'où

$$\left(\int \frac{|fg|}{\|g\|_q^q}\, d\mu \right)^p \leq \int_{(|g|>0)} \left(\frac{|f|}{|g|^{q-1}} \right)^p \frac{|g|^q}{\|g\|_q^q}\, d\mu$$

$(q-1)p = q$

$$\left(\int \frac{|fg|}{\|g\|_q^q}\, d\mu \right)^p \leq \int \frac{|f|^p}{\|g\|_q^q}\, d\mu. \qquad \left(q - \frac{q}{p} = 1\right)$$

Le cas d'égalité dans Hölder entraîne

$$\frac{|f|}{|g|^{q-1}} 1\!\!1_{|g|>0} = \text{const p.p.}$$

$$\Leftrightarrow \frac{|f|^p}{|g|^q} = \text{const pp sur } (|g|>0)$$

De plus.

$$\int |fg|\, d\mu = \| 1\!\!1_{(|g|=0)} f + 1\!\!1_{(|g|>0)} f \|_p \| g \|_q$$

$$\int_{|g|>0} |fg|\, d\mu \leq \| 1\!\!1_{|g|>0} f \|_p \| g \|_q .$$

$$\int (1\!\!1_{|g|=0} f + 1\!\!1_{|g|>0} f)^p\, d\mu \leq \int (1\!\!1_{|g|>0} f)^p\, d\mu .$$

En utilisant

$$(1\!\!1_{|g|=0} f + 1\!\!1_{|g|>0} f)^p = 1\!\!1_{|g|=0} |f|^p + 1\!\!1_{|g|>0} |f|^p$$

on obtient $f = 0$ sur $|g| = 0$ p.p.

D'où $|f|^p = \lambda |g|^q$ pour une certaine constante λ.

21 Notation (Inégalité de Minkowski généralisée)

On considère des fonctions mesurable à valeurs vectorielles dans un Banach.

$$f : \Omega \to E$$

$(\Omega, \mathcal{F}, \lambda)$ un espace mesuré (pas forcément de probabilité) E un espace de Banach. On s'intéresse au problème :

1) Donner un sens à "mesurable" $\mathcal{L}^0(\Omega, \mathcal{F}; E)$

2) Donner un sens à $L^1(\Omega, \lambda; E)$ et à $\int f(\omega)\, d\lambda(\omega)$

On simplifie le problème en prenant

$$E = L^p(X, \mathcal{A}, \mu).$$

Pour tout $\omega \in \Omega$, $f(\omega) : X \to \mathbb{R}$ qu'on peut écrire $f(\omega, x) = f(\omega)(x)$. On simplifie encore le problème en considérant

$$f : \Omega \times X \to \mathbb{R} \quad \text{mesurable pour } \mathcal{F} \otimes \mathcal{A}.$$

$\mathcal{L}^0(\Omega, \mathcal{F}; E) = \{ f : \Omega \times X \to \mathbb{R} \text{ mesurable pour } \mathcal{F} \otimes \mathcal{A} \}$.

On cherche donc à définir (pour des fonctions simples, la déf est évidente)

$$\int f(\omega,\cdot)\,d\lambda(\omega) \quad \text{lorsque} \quad \int \|f(\omega,\cdot)\|_p\,d\lambda < +\infty$$

On introduit donc

$$\mathcal{L}^1(\Omega,\lambda;L^p(X,\mathcal{A},\mu))$$
$$=\left\{ f:\Omega\times X\to\mathbb{R}\ \mathcal{F}\otimes\mathcal{A}\text{ mesurable t.q. } \int \|f(\omega,\cdot)\|_p\,d\lambda(\omega)<+\infty \right\}.$$

On sait déjà que $\omega\mapsto\|f(\omega,\cdot)\|$

$$\omega\longmapsto\|f(\omega,\cdot)\|_p=\left[\int|f(\omega,x)|^p\,d\mu(x)\right]^{\frac{1}{p}}$$

est mesurable. On définit aussi la notion d'intégrale vectorielle par

$$\left[\int f(\omega,\cdot)\,d\lambda(\omega)\right](x):=\int f(\omega,x)\,d\lambda(\omega)$$

$f(x)\ \int f(\omega,x)\,d\lambda(\omega)<+\infty \Leftarrow$ Soit $g\in L^q(X,\mathcal{A},\mu)$ $g\geq 0$

$\iint|f(\omega,x)\,g(x)|\,d\lambda(\omega)\,d\mu(x)$
$\leq\int\|f(\omega,\cdot)\|_p\|g\|_q\,d\lambda$

On définit $L^1=\mathcal{L}^1/\sim$ pour la relation.

$f\sim g \iff$ pour $\lambda\otimes\mu$ p.p. $f(\omega,x)=g(\omega,x)$

On se propose alors de montrer

$$\left\|\int f(\omega,\cdot)\,d\lambda(\omega)\right\|_p\leq\int\|f(\omega,\cdot)\|_p\,d\lambda(\omega)$$

22 **Théorème** (Minkowski généralisé)

Soit $f:\Omega\times X\to\mathbb{R}$ $\mathcal{F}\otimes\mathcal{A}$-mesurable telle que

$$\int\left[\int|f(\omega,x)|^p\,d\mu(x)\right]^{\frac{1}{p}}d\lambda(x)<+\infty$$

Alors les fonctions de l'expression suivante sont intégrables et

$$\left[\int\left|\int f(\omega,x)\,d\lambda(\omega)\right|^p d\mu(x)\right]^{\frac{1}{p}}$$
$$\leq\int\left[\int|f(\omega,x)|^p\,d\mu(x)\right]^{\frac{1}{p}}d\lambda(\omega)$$

preuve Il suffit de prendre $f \geq 0$.

On pose

$$F(x) = \int f(\omega, x)\, d\lambda(\omega) \quad (\text{existe p.p.})$$

Alors :

$$\int F(x)^p\, d\mu(x) = \int F^{p-1}(x)\, F(x)\, d\mu(x)$$
$$= \int d\lambda(\omega) \left[\int F^{p-1}(x)\, f(\omega, x)\, d\mu(x)\right]$$

Soit q l'exposant conjugué à p, alors

$$\int F^{p-1}(x)\, f(\omega, x)\, d\mu(x) \leq \left[\int f(\omega,x)^p\, d\mu(x)\right]^{\frac{1}{p}} \left[\int F^p(x)\, d\mu(x)\right]^{\frac{1}{q}}$$

On vient de montrer que

$$\int F^p d\mu \leq \left[\int \left[\int f(\omega,x)^p d\mu\right]^{\frac{1}{p}} d\lambda(\omega)\right] \cdot \left[\int F^p(x)\, d\mu(x)\right]^{\frac{1}{q}}$$

d'où $\|F\|_p \leq \int \|f(\omega, \cdot)\|_p\, d\lambda(\omega)$.

En fait rien ne garantit $F \in L^p$. On reprend la preuve en prenant une suite croissante exhaustive $\Omega = \bigcup_n \uparrow \Omega_n$, $\lambda(\Omega_n) < +\infty$ et une fonction $g : X \to \mathbb{R}^+$ ne s'annulant jamais et dans L^p. On pose

$$f_n(\omega, x) = \mathbb{1}_{(\omega \in \Omega_n,\ f(\omega,x) < n g(x))}\, f(\omega, x)$$

Alors (f_n) converge simplement vers f.

$$F_n(x) = \int f_n(\omega, x)\, d\lambda(\omega) \leq \lambda(\Omega_n)\, n\, g(x)$$

est dans L^p, et la suite (f_n) est croissante ■