II.3 Complétude - Séparabilité - Densité

23 Remarque Soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ σ-fini. Soit $p \in [1, +\infty[$
- $(f_n)_{n\geq 0}$ une suite de L^p, et $F \in L^p$. On suppose
1) $f_n(x) \to f(x)$ p.p.
2) $|f_n(x)| \leq F(x)$ p.p. $\forall n \geq 0$.

Alors $(f_n)_{n\geq 1} \to f$ dans L^p

Preuve Soit $p \in [1, +\infty[$

$|f_n(x) - f(x)| \leq 2F(x)$

$|f_n(x) - f(x)|^p \leq 2^p F^p(x)$

on applique le théorème de convergence dominée

$\int |f_n(x) - f(x)|^p \, d\mu(x) \to 0.$

24 Remarque Le résultat précédent est faux ds L^∞.
$X = [0, 1]$ $f_n(x) = x^n \to 0 = f$ p.p. mais $\|f - f_n\|_\infty = 1$.

25 Théorème $(X, \mathcal{A}, \mu)$ σ-fini et $p \in [1, +\infty[\cup \{+\infty\}$
Alors L^p est complet

preuve 1) cas $p \in [1, +\infty[$ Soit (f_n) une suite de Cauchy
Soit $\varepsilon > 0$, $\exists$ $(n_k)_{k\geq 0}$ strictement croissante telle que.

$\forall k \geq 1$ $\|f_{n_k} - f_{n_{k-1}}\|_p \leq \frac{\varepsilon}{2^k}$

on pose $F(x) = |f_{n_0}(x)| + \sum_{k\geq 1} |f_{n_k}(x) - f_{n_{k-1}}(x)|$

Alors $\|F\|_p \leq \|f_{n_0}\|_p + \sum_{k\geq 1} \|f_{n_k} - f_{n_{k-1}}\|_p$

(on a utilisé Beppo-Levi) En particulier

$\sum_{k\geq 1} |f_{n_k}(x) - f_{n_{k-1}}(x)| < +\infty$ p.p.

Par complétude de $\mathbb{R}$.

$(f_{n_k}(x))_{k\geq 0}$ converge vers $f(x)$ et f est mesurable.

$$|f_{n_k}(x)| \leq |f_{n_k}(x) - f_{n_0}(x)| + |f_{n_0}(x)| \leq F(x)$$

D'où $\|f - f_{n_k}\|_p \longrightarrow 0$ d'après la remarque précédente.

On vient de montrer qu'une sous suite d'une suite de Cauchy converge dans L^p vers f. Donc la suite $(f_n)_{n\geq 0}$ converge vers f.

2) $p = +\infty$

On choisit encore $(n_k)\uparrow$ $\quad \sum \|f_{n_k} - f_{n_{k+1}}\|_\infty < +\infty$

On peut trouver un négligeable et une constante $M \geq 0$

$\forall x \notin N \quad \sum_{k\geq 1} |f_{n_k}(x) - f_{n_{k-1}}(x)| \leq M$.

$(f_{n_k}(x))_k \to f(x)$ et $\|f - f_{n_k}\|_\infty \leq \sum_{l \geq k+1} \|f_{n_l} - f_{n_{l+1}}\|_\infty$

On termine comme précédemment. ■

26 **Définition** On dit qu'une σ-algèbre $\mathcal{A}$ est ~~séparable~~ engendrée dénombrablement s'il existe $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{A}$ dénombrable tel que $\mathcal{A} = \sigma(\mathcal{F})$

27 **Exemple** (X, d) un espace Polonais (métrique complet séparable). Alors $\mathcal{B}_X$ la tribu des boréliens est engendrée dénombrablement

preuve Soit $E \subset X$ dense dénombrable, on prend alors $\mathcal{F}$ = l'ensemble des boules ouvertes de centre dans E et de rayon rationnel positif.

Tout ouvert est réunion dénombrable de parties de $\mathcal{F}$.

$\sigma(\mathcal{F}) = \mathcal{B}_X$

28 **Remarque** Si $\mathcal{A}$ est denombrablement engendré on peut trouver une algèbre $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$ telle que
1) $\mathcal{B}$ est denombrable
2) $\sigma(\mathcal{B}) = \mathcal{A}$.

preuve $\tilde{\mathcal{F}}$ = les parties de $\mathcal{F}$ et les parties complementaires
$\mathcal{G}$ = intersection finie de parties de $\tilde{\mathcal{F}}$
$\mathcal{B}$ = reunion finie des parties de $\mathcal{G}$.

29 **Théorème** [regularité des mesures]
Soient $(X, \mathcal{A}, \mu)$ μ une mesure de mass. finie
$\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$ une sous algèbre telle que $\mathcal{A} = \sigma(\mathcal{B})$. Alors
$\mathcal{A} = \{A \in \mathcal{A} : \forall \varepsilon > 0\ \exists B \in \mathcal{B}$ t.q. $\mu(A \Delta B) < \varepsilon\}$

preuve On note
$\mathcal{C} = \{A \in \mathcal{A} : \forall \varepsilon > 0\ \exists B \in \mathcal{B}$ t.q. $\mu(A \Delta B) < \varepsilon\}$
Alors $\mathcal{C} \supseteq \mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ est une σ-algèbre.
1) $\phi, X \in \mathcal{C}$
2) $(A_n)_{n \geq 0} \in \mathcal{C}$, $\mu(B_n \Delta A_n) \leq \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}$

$$\mu((\cup B_n) \Delta (\cup A_n)) \leq \sum_{n \geq 0} \mu(B_n \Delta A_n)$$
$$\int |1\!\!1_B - 1\!\!1_A| d\mu \quad < \varepsilon$$

comme $1\!\!1_A = \lim_{N \to +\infty} 1\!\!1_{\cup_{k=0}^N A_k}$
$1\!\!1_B = \lim_{N \to +\infty} 1\!\!1_{\cup_{k=0}^N B_k}$

Par le théorème de convergence dominée
$$\mu\left((\cup_{n \geq 0} A_n) \Delta \left(\bigcup_{k=0}^N B_k\right)\right) = \int |1\!\!1_A - 1\!\!1_{\cup_{k=0}^N B_k}|$$

Pour N suffisament grand
$$\mu(A \Delta (\cup_{k=0}^N B_k)) < \varepsilon$$
on vient de montrer que $\mathcal{C}$ est stable par $\cup$ denombrable.

3) comme $\mu(A \Delta B) = \mu((X \setminus A) \Delta (X \setminus B))$ c'est aussi stable par complémentarité.
Donc $\mathcal{C}$ est une σ-algèbre $\mathcal{C} = \mathcal{A}$.

30 Théorème Soit $(X, \mathcal{B}, \mu)$ σ-finie, $\mathcal{B}$ engendrée dénombrablement. Soit $p \in [1, +\infty[$
Alors L^p est séparable.

preuve On découpe $X = \sqcup_{n \geq 0} X_n$ et $\mu(X_n) < +\infty$.
On peut raisonner séparément sur chaque $(X_n, \mu_n = \mu|_{X_n})$
On suppose que μ est de masse finie.
$$\begin{cases} \int_{X_n} |f - g_n|^p d\mu \leq \frac{\varepsilon^p}{2^{n+1}} \\ \|f - \sum_{n=0}^N g_n 1_{X_n}\|_p^p \leq 2\varepsilon \end{cases}$$

1) On montre que les fonctions (ou étagées) simples ($\mathcal{A}$-mesurable prenant un nombre fini de valeurs) sont denses. Soit $f \in L^p$
on découpe $f = Re(f) + i Im(f)$: on peut supposer f réelle.
On découpe $f = f^+ - f^-$ ($f^+ = \max(0, f)$, $f^- = \max(0, -f)$)
On peut supposer f réelle positive. Soit
$$f_n = \sum_{k=1}^{n 2^n} 1\!\!1_{\left(\frac{k-1}{2^n} \leq f < \frac{k}{2^n}\right)} \frac{k-1}{2^n}.$$
Alors $0 \leq f_n \leq f$ et $(f_n)_{n \geq 0}$ converge simplement vers f
comme la mesure est finie $(f_n)_{n \geq 0}$ converge dans L^p.

2) Une fonction simple est de la forme $f = \sum_{k=1}^N a_k 1\!\!1_{A_k}$
$(A_k)_{k=1}^N$ 2 à 2 disjoints. On peut approcher dans L^p
f par $g = \sum_{k=1}^N b_k 1\!\!1_{A_k}$, $b_k \in \mathbb{Q}$.
$$\|f - g\|_p^p = \sum_{k=1}^N |a_k - b_k|^p \mu(A_k).$$
Il reste à montrer qu'on peut approcher les indicatrices d'ensemble $1\!\!1_A$ par une suite d'indicatrices prise dans un ensemble dénombrable.

Soit $\mathcal{B}$ une algèbre dénombrable engendrant $\mathcal{A}$, (13)

$\forall \varepsilon>0 \ \forall A\in\mathcal{A} \ \exists B\in\mathcal{B} \quad \mu(A\Delta B)<\varepsilon^{p}$

$\|1\!\!1_A - 1\!\!1_B\|_p \leq \varepsilon \ldots$

3) L'espace vectoriel des fonctions simples $\mathcal{B}_n$ mesurable à valeurs dans $\mathbb{Q}+i\mathbb{Q}$ définie sur X_n.

$$\mathcal{E}_n=\{\sum_{k=1}^{N} b_k 1\!\!1_{B_k} : b_k\in\mathbb{Q}+i\mathbb{Q}, B_k\in\mathcal{B}_n\}$$

est dénombrable et dense dans $L^p(X_n,\mathcal{A}_n,\mu_n)$. avec $\mathcal{B}_n=\mathcal{B}\cap X_n$. L'espace vectoriel des somme finie $\mathcal{E}=\bigcup_{n\geq 1}\mathcal{E}_n$ est dénombrable et dense dans $L^p(X,\mathcal{A},\mu)$. ∎

3) Théorème Soit $(X,\mathcal{A},\mu)$ telque $\mu:\mathcal{A}\to[0,+\infty)\cup\{+\infty\}$ prend un nombre non dénombrable de valeurs. Alors $L^\infty(X,\mathcal{A},\mu)$ n'est pas séparable

aussi il existe une famille $\mathcal{F}$ non dénombrable vérifiant $A\neq B\in\mathcal{F} \Rightarrow \mu(A\Delta B)>0$

preuve Par l'absurde. Soit $(f_n)_{n\geq 0}$ une suite de fonctions dense dans L^∞. On pose.

$$\mathcal{A}_n=\{A\in\mathcal{A} : \|1\!\!1_A - f_n\|_\infty<\frac{1}{2}\}.$$

Alors $\mathcal{A}\subseteq\bigcup_{n\geq 0}\mathcal{A}_n$. Soit $\mathcal{F}\subseteq\mathcal{A}$ tel que 1) $\mathcal{F}$ non dénombrable

2) $\forall F\neq F'\in\mathcal{F} \quad \mu(F)\neq\mu(F') \Rightarrow \|1\!\!1_F - 1\!\!1_{F'}\|_\infty>0$

Nécessairement $\mathcal{F}\cap\mathcal{A}_n$ contient au moins 2 partie.

$$\|1\!\!1_F - 1\!\!1_{F'}\|_\infty<1$$

mais $1\!\!1_F - 1\!\!1_{F'}\in\{-1,0,+1\}$

donc $\|1\!\!1_F - 1\!\!1_{F'}\|_\infty=0 \iff F=F' \ \mu pp$

et on aurait $\mu(F)=\mu(F')$. absurde.

3.2 lemme Soit (X,d) un espace métrique. Soit F un fermé non vide et U un ouvert t.q. $F \subseteq U$. Alors il existe $\varphi : X \to [0,1]$ continue t.q.
$$\mathbb{1}_F \leq \varphi \leq \mathbb{1}_U$$
plus précisément $\varphi \equiv 1$ sur F et $\varphi \equiv 0$ sur $X \setminus U$

preuve $$\varphi(x) = \frac{d(x, X\setminus U)}{d(x,F) + d(x, X\setminus U)}$$
(Si $U = X$, $\varphi(x) \equiv 1$)

[Regularité des mesures de masse finie]

3.3 Théorème Soit (X,d) un espace métrique et μ une mesure de probabilité. Alors μ est régulière.
$\forall \varepsilon > 0$ $\forall B \in \mathcal{A}$. $\exists$ F fermé et U ouvert tels que
$$F \subseteq B \subseteq U \quad \text{et} \quad \mu(U \setminus F) < \varepsilon.$$

preuve Soit
$$\mathcal{C} = \{ B \in \mathcal{A} : \forall \varepsilon\ \exists F \text{ fermé}, U \text{ ouvert t.q. } F \subseteq B \subseteq U \text{ et } \mu(U \setminus F) < \varepsilon \}.$$

1) On montre que $\mathcal{C}$ contient les ouverts : Soit $U \neq X$
$$F_\varepsilon = \{ x : d(x, X \setminus U) \geq \varepsilon \} \subseteq U, \quad \bigcup_{\varepsilon > 0} F_\varepsilon = U$$
par convergence dominée :
$$\lim_{\varepsilon \to 0} \mu(U \setminus F_\varepsilon) = 0.$$

2) $\mathcal{C}$ est stable par passage au complémentaire.
$$F \subseteq B \subseteq U \Rightarrow X \setminus U \subseteq X \setminus B \subseteq X \setminus F.$$
$\mathcal{C}$ contient $\emptyset$ et X.

3) $\mathcal{C}$ est stable par réunion : $\varepsilon > 0$ fixé, $B_n \in \mathcal{C}$
$$F_n \subseteq B_n \subseteq U_n \quad \mu(U_n \setminus F_n) \leq \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}$$

Alors $\bigcup_{n\geq 0} F_n \subseteq \bigcup_{n\geq 0} B_n \subseteq \bigcup_{n\geq 0} U_n$.

$$\mu\left(\bigcup_{n\geq 0} U_n \setminus \bigcup_{n\geq 0} F_n\right) < \varepsilon$$

Par convergence dominée :

$$\lim_{N\to+\infty} \mu\left(\bigcup_{n\geq 0} U_n \setminus \bigcup_{n=0}^{N} F_n\right) \leq \varepsilon$$

On peut donc trouver N tel que

$$F := \bigcup_{n=0}^{N} F_n \subseteq \bigcup_{n\geq 0} B_n \subseteq \bigcup_{n\geq 0} U_n =: U.$$

$$\mu(U \setminus F) < \varepsilon.$$

(fini ou le compact)

34 Théorème (Densité des fonctions $\mathcal{C}^{\infty}_{comp}$).

Soit μ une mesure de Radon sur $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B})$ et $p \in [1, +\infty[$

Alors $\mathcal{C}^{\infty}_{comp}(\mathbb{R}^d, \mathbb{C})$ est dense dans L^p

preuve $\mathbb{R}^d = \bigcup_{N\geq 0} \underbrace{\overline{B(0,N)}}_{=X_N}$, $\mu(X_N) < +\infty$. Soit $f \in L^p$

on peut considérer $f_n = f \mathbb{1}_{X_n}$ et donc supposer μ de masse finie. Quitte à prendre $f = Re(f) + i\,Im(f)$. on peut supposer f réelle. Quitte à prendre $f = f^+ - f^-$. On peut supposer $f \geq 0$.

On a déjà vu que les fonctions ~~simple~~ étagées sont denses dans L^p. On peut donc suppose f simple à support compact

$$f = \sum_{k=1}^{n} a_k \mathbb{1}_{A_k}. \qquad A_k \subseteq \overline{B}(0,N)$$

Par regularité de mesure de masse finie. Soit $\mu(A) < +\infty$

$\forall \varepsilon > 0$, $\exists F$ fermé U ouvert $\quad U \subseteq B(0,N+1)$

$$F \subseteq A \subseteq U, \qquad \mu(U \setminus F) < \varepsilon.$$

Soit φ continue telle que

$$\mathbb{1}_F \leq \varphi \leq \mathbb{1}_U$$

$$\int |\mathbb{1}_A - \varphi|^p d\mu \leq \int |\mathbb{1}_U - \mathbb{1}_F|^p d\mu$$

$$= \int |\mathbb{1}_U - \mathbb{1}_F| d\mu = \mu(U \setminus F) < \varepsilon$$

Soit $\varphi_R(x) = \varphi(x)\left[1 - \min\left(1, \frac{d(x,0)}{R}\right)\right]$

$\varphi_R \in \mathcal{C}^0_{comp}(\mathbb{R}^d)$ et $\varphi_R \uparrow \varphi$ simplement

donc dans L^p.

35. Théorème [continuité de translation] Soit μ la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^d$. On note pour tout $a \in \mathbb{R}^d$ la translation ; $f \in L^p$, $p \in [1, +\infty[$

$$\tau_a[f](x) = f(x-a).$$

Alors $a \in \mathbb{R}^d \longmapsto \tau_a[f] \in L^p$ est continue

Preuve Soit $f \in L^p$, $a_0 \in \mathbb{R}^d$. On fixe $\varepsilon > 0$.

$\exists \varphi \in \mathcal{C}^0_{comp}$ $\|f - \varphi\|_p < \varepsilon$

Alors $\|\tau_a f - \tau_a \varphi\|_p = \|f - \varphi\|_p < \varepsilon$.

(par invariance de la mesure de Lebesgue).

D'où $\|f - \tau_a f\|_p \leq \varepsilon + \|\tau_a \varphi - \varphi\|_p$.

Soit $K = \mathrm{supp}(\varphi)$ et $a \in B(a_0, 1)$.

On note $L = K + \overline{B(0,1)}$ compact.

$\mathrm{supp}(\tau_a \varphi) \subset L$.

$\|\tau_a \varphi - \varphi\|_p \leq \|\tau_a \varphi - \varphi\|_\infty \, \mu(L)^{\frac{1}{p}}$

$\|\tau_a \varphi - \varphi\|_\infty = \sup_{x \in L} \|\tau_a \varphi(x) - \varphi(x)\|$

Par continuité uniforme de φ sur L.

il existe $\eta > 0$ tel que

$$\forall a \in B(a_0, \eta) \quad \|\tau_a \varphi - \varphi\|_\infty < \frac{\varepsilon}{\mu(L)^{1/p}}$$

D'où $\|\tau_a f - f\| \leq 2\varepsilon$.