II.4 Dualité

36 Rappel Si $(E, \|\cdot\|)$ est un espace de Banach.
Le dual E' est l'ensemble des applications linéaires continues. On rappelle aussi $u \in E'$
$\Leftrightarrow$ 1) u est continue en 0
$\Leftrightarrow$ 2) $\exists M > 0$ t.q. $\forall x \in E \quad |u(x)| \leq M\|x\|$.

37 Remarque , Soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace σ-fini. Si $p \in [1, +\infty[\cup \{\infty\}$ et q est l'exposant conjugué. Si $g \in L^q$ alors.

$$\Phi_g : f \in L^p \mapsto \int f g \, d\mu \quad \in (L^p)'$$

de norme $\|g\|_q$.

En d'autre terme
1) $\|g\|_q = \sup\limits_{\|f\|_p \leq 1} |\int f g \, d\mu|$
2) $\|f\|_p = \sup\limits_{\|g\|_q} |\int f g \, d\mu|$

preuve $\quad |\Phi_g(f)| \leq \|f\|_p \|g\|_q$

En particulier $\|\Phi_g\| \leq \|g\|_q$.

Réciproquement.

$$\left|\int f g \, d\mu\right| \leq \|f\|_p \, \|\Phi_g\|$$

on pose

$$f = |g|^{q-1} \frac{\bar{g}}{|g|} \mathbb{1}_{(g \neq 0)}$$

Alors $\quad |f|^p = |g|^q \in L^1$.

$$\Phi_g(f) = \int |g|^q \, d\mu.$$

$$\|g\|_q^q \leq \|g\|_q^{\frac{q}{p}} \|\Phi_g\|.$$

$q - \frac{q}{p} = 1 \qquad \|g\|_q \leq \|\Phi_g\|.$ $\blacksquare$

38 Théorème Soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré σ-fini et $p \in [1, +\infty[$ $(p \neq +\infty)$ Alors

Toute forme linéaire est de la forme Φ_g pour un unique $g \in L^q$.

Le cas $p = 1$ est différent de $p \in]1, +\infty[$. Le dual de L^∞ est beaucoup plus gros. On traite unique le cas $p \in]1, +\infty[$. On va montrer que L^p est uniformément convexe.

39 **Définition** Un espace de Banach $(E, \|\cdot\|)$ est dit uniformément convexe si pour tout $\varepsilon \in]0,1[$ il existe $\delta \in]0,1[$ tel que :

$$\begin{cases} \|x\| = \|y\| = 1 \\ \|x-y\| \geq \varepsilon \end{cases} \Rightarrow \left\| \frac{x+y}{2} \right\| \leq 1-\delta$$

40 **Lemme** Soit $p \in]1, +\infty[$. Alors pour tout $\varepsilon \in]0,1[$, il existe $\delta \in]0,1[$ tel que pour tout $u, v \in \mathbb{C}$

$$|u-v| \geq \varepsilon [|u|^p + |v|^p]^{\frac{1}{p}} \Rightarrow \left| \frac{u+v}{2} \right|^p \leq (1-\delta) \frac{|u|^p + |v|^p}{2}$$

preuve On pose $x = \dfrac{|u|}{[|u|^p + |v|^p]^{1/p}}$. $y = \dfrac{|v|}{[|u|^p + |v|^p]^{1/p}}$. Il suffit de montrer :

$$[|x-y| \geq \varepsilon \text{ et } x^p + y^p = 1] \Rightarrow \left| \frac{x+y}{2} \right|^p \leq 1-\delta$$

Soit $K = \{(x,y) \in \mathbb{R}_+^2 : |x-y| \geq \varepsilon \text{ et } x^p + y^p = 1\}$

Alors K est compact.

$$\max_{(x,y) \in K} \left(\frac{x+y}{2} \right)^p = \left(\frac{x_* + y_*}{2} \right)^p < \frac{x_*^p + y_*^p}{2} = 1$$

par stricte convexité. On pose

$$1-\delta = \left(\frac{x_* + y_*}{2} \right)^p.$$

41 **Théorème** Soit $p \in]1,+\infty[$. $(X,\mathcal{A},\mu)$ σ-fini.
Alors L^p est uniformément convexe

$$[\|f\|_p = \|g\|_p = 1,\ \|f-g\|_p \geq \varepsilon] \Longrightarrow \left\|\frac{f+g}{2}\right\|_p \leq 1-\delta.$$

preuve Soit $\varepsilon>0$ et $\|f\|_p = \|g\|_p = 1$, $\|f-g\|_p \geq \varepsilon$

on pose

$$A = \left\{ |f(x)-g(x)|^p \geq \frac{\varepsilon^p}{4}\left[|f(x)|^p + |g(x)|^p\right] \right\}$$

on montre d'abord que

$$\max\left(\|1\!\!1_A f\|_p, \|1\!\!1_A g\|_p\right) \geq \frac{\varepsilon}{2^{1/p+1}}$$

$$\varepsilon^p \leq \|f-g\|_p^p = \int |f-g|^p \, d\mu$$

$$= \int_A |f-g|^p \, d\mu + \int_{X\setminus A} |f-g|^p \, d\mu$$

$$\leq \int_A |f-g|^p \, d\mu + \frac{\varepsilon^p}{4}\left[\int |f|^p + \int |g|^p\right]$$

$$\Longrightarrow \int_A |f-g|^p \, d\mu \geq \frac{\varepsilon^p}{2}$$

$$\|1\!\!1_A (f-g)\|_p \geq \frac{\varepsilon}{2^{1/p}}$$

$$\|1\!\!1_A f\|_p + \|1\!\!1_A g\|_p \geq \frac{\varepsilon}{2^{1/p}}$$

on montre maintenant l'uniforme convexité.

$$\int \left[\frac{|f|^p+|g|^p}{2} - \left|\frac{f+g}{2}\right|^p\right] d\mu$$

$$\geq \int_A \left[\frac{|f|^p+|g|^p}{2} - \left|\frac{f+g}{2}\right|^p\right] d\mu \qquad (*)$$

Il existe $\delta \in]0,1[$ tel que.

$$|u-v|^p \geq \frac{\varepsilon^p}{4}\left[u^p + v^p\right] \Longrightarrow \left|\frac{u+v}{2}\right|^p \leq (1-\delta)\frac{u^p+v^p}{2}$$

$$(*) \geq \delta \int_A \frac{|f|^p + |g|^p}{2} \, d\mu \geq \delta \frac{\varepsilon^p}{2^{p+2}} \qquad \blacksquare$$

42 Lemme La norme de L^p est Gateaux differentiable.

$\forall f \in L^p \quad \forall h \in L^p$

$$\lim_{t\to 0} \frac{\|f+th\|_p^p - \|f\|_p^p}{t} = \int_{[f\neq 0]} p|f|^{p-1} \mathrm{Re}\left(\frac{\bar{f}}{|f|} h\right) d\mu$$

(on remarque que $|f|^{p-1} \in L^q$ et $\mathrm{Re}\left(\frac{\bar f}{|f|} h\right) \in L^p$.)

<u>preuve</u> On cherche à intervertir $\int$ et $\lim_{t\to 0}$.

$$\int \frac{|f+th|^p - |f|^p}{t} d\mu$$

1) Pour $f=0$ $\quad \lim_{t\to 0} \frac{|th|^p}{t} = 0$

2) Pour $f\neq 0$ $\quad z \mapsto |z|$ est differentiable en $z\neq 0$ de differentielle $h \mapsto \frac{z\bar h + \bar z h}{2|z|} = \mathrm{Re}\left(\frac{\bar z}{|z|} h\right)$

$z \mapsto |z|^p$ est diff en $z\neq 0$ de differentielle.

$h \mapsto p|z|^{p-1} \mathrm{Re}\left(\frac{\bar z}{|z|} h\right)$

Par composition

$$\lim_{t\to 0} \frac{|f+th|^p - |f|^p}{t} = p|f|^{p-1} \mathrm{Re}\left(\frac{\bar f}{|f|} h\right)$$

3) On montre une domination uniforme

Pour $t>0$:

$$f+th = f + t(f+h-f) = (1-t)f + t.(f+h)$$

Par convexité de $x \mapsto x^p$

$$|f+th|^p \leq |(1-t)f + t(f+h)|^p$$
$$\leq (1-t)|f|^p + t|f+h|^p$$

$$\frac{|f+th|^p - |f|^p}{t} \leq |f+h|^p - |f|^p$$

Pour $t<0$ on écrit $f+th = f+(-t)(-h)$.

$$\frac{|f+th|^p - |f|^p}{t} \leq |f-h|^p - |f|^p.$$

Dans les deux cas $\left(|f+h|^p - |f|^p, |f-h|^p - |f|^p\right) \in L^p$.

Preuve du théorème 38

Soit $\Phi \in (L^p)'$. On peut supposer $\|\Phi\| = 1$

$\exists (f_n)_{n \geq 1} \in L^p$ tel que $\begin{cases} \Phi(f_n) \to \|\Phi\| = 1 \\ \|f_n\| = 1. \end{cases}$

comme $\Phi(f_n) = e^{i\theta_n} |\Phi(f_n)|$

quitte à prendre $e^{-i\theta_n} f_n$ on peut supposer $\Phi(f_n) > 0$

1) on montre que (f_n) est de Cauchy.

$$\left\| \frac{f_n + f_m}{2} \right\|_p \geq \frac{\Phi(f_n + f_m)}{2} \longrightarrow 1.$$

Par uniforme convexité.

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta \quad \exists N \quad \forall m, n \geq N$

$\|f_m\| = \|f_n\| = 1$ et $\left\| \frac{f_n + f_m}{2} \right\| > 1 - \delta$

$\|f_n - f_m\| < \varepsilon$

Soit $f = \lim_{n \to +\infty} f_n$ dans L^p, $\|f\| = 1$, $\Phi(f) = 1$.

2) Soit $h \in L^p$.

$(*)$ $\frac{\operatorname{Re}\Phi(f + th) - \operatorname{Re}\Phi(f)}{t} = \operatorname{Re}\Phi(h)$

$$(*) \leq \frac{\|f + th\|_p - \|f\|_p}{t}$$

$$\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \|f + th\|_p = \frac{1}{p} \|f\|_p^{\frac{1}{p} - 1} \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \|f + th\|_p^p$$

$$= \int_{|f| \neq 0} |f|^{p-1} \operatorname{Re}\left(\frac{\bar{f}}{|f|} h\right) d\mu$$

$$\operatorname{Re}\Phi(h) \leq \int_{f \neq 0} |f|^{p-1} \operatorname{Re}\left(\frac{\bar{f}}{|f|} h\right) d\mu.$$

$$\operatorname{Re}\Phi(h) = \int_{f \neq 0} |f|^{p-1} \operatorname{Re}\left(\frac{\bar{f}}{|f|} h\right) d\mu$$

$$\operatorname{Re}\Phi(-ih) = \int_{f \neq 0} |f|^{p-1} \operatorname{Re}\left(\frac{\bar{f}}{|f|} (-ih)\right) d\mu.$$