IV Fourier

IV_1 Théorie L^1

71 **Définition** Soit $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ la transformée de Fourier de f est

$$\hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x) e^{-i2\pi\langle x,\xi\rangle} dx$$

Remarque : on écrira aussi $\mathcal{F}[f] = \hat{f}$

abus de notation $\mathcal{F}[f(x)](\xi)$

72 **Exemple** $f = \mathbb{1}_{[a,b]}$, $d = 1$, $\xi \neq 0$

$$\int_a^b e^{-i2\pi x\xi} dx$$

$$= \frac{-1}{i2\pi\xi}\left[e^{-i2\pi x\xi}\right]_a^b$$

$$= \frac{e^{-i2\pi a\xi} - e^{-i2\pi b\xi}}{i2\pi\xi}$$

$$= e^{-i2\pi\frac{a+b}{2}\xi}\left[\frac{e^{i2\pi\frac{b-a}{2}\xi} - e^{-i2\pi\frac{b-a}{2}\xi}}{i2\pi\xi}\right]$$

$$= \frac{\sin(\pi(b-a)\xi)}{\pi\xi}\exp\left(-i2\pi\frac{a+b}{2}\xi\right)$$

73 **Définition**:

La fonction sinus cardinal $\operatorname{sinc}(t) = \begin{cases} 1 & t = 0 \\ \frac{\sin t}{t} & t \neq 0 \end{cases}$

$$\int_a^b e^{-i2\pi x\xi} dx = (b-a)\operatorname{sinc}(\pi(b-a)\xi)\exp(-i\pi(a+b)\xi)$$

74 **Lemme (Riemann-Lebesgue)** $\operatorname{sinc}(\pi\xi) = \mathcal{F}\left[\mathbb{1}_{[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]}(x)\right]$

Soit $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$, alors $\hat{f} \in \mathcal{C}_0^0(\mathbb{R}^d)$

preuve $\mathbb{1}_{[-R,+R]} = g(x) \Rightarrow \hat{g}(\xi) = 2R\operatorname{sinc}(2\pi R\xi)e^{-i2\pi R\xi}$

$$\lim_{\xi\to+\infty} g(\xi) = 0$$

Rappel Une fonction étagée $\sum_{i\in I}\alpha_i \mathbb{1}_{Q_i}$ (par rectangle) Q_i rectangle

Si $f(x) = \prod_{k=1}^{d} \mathbb{1}_{[a_k, b_k]}(x_k) = \mathbb{1}_{Q}(x)$.

$$\hat{f}(\xi) = \prod_{k=1}^{d} (b_k - a_k)\, \mathrm{sinc}\left(\pi (b_k - a_k)\xi_k\right) \exp\left(-i2\pi \frac{b_k + a_k}{2}\xi_k\right)$$

alors $\lim_{\xi \to +\infty} \hat{f}(\xi) = 0$.

Toute fonction continue à support compact est approchable dans $L^1(\mathbb{R}^d)$ par une fonction étagée : par rectangle

$$g_n(x) = \sum_{k_1 = -n^2+1}^{n^2} \cdots \sum_{k_d = -n^2+1}^{n^2} f\left(\frac{k_1}{n}, \dots, \frac{k_d}{n}\right)$$

$$\prod_{j=1}^{d} \mathbb{1}_{\left[\frac{k_j - 1}{n}, \frac{k_j}{n}\right[}(x_j)$$

Donc toute fonction L^1 est approchable dans L^1 par une fonction étagée g_n car approchable par une fonction C-

$$\lim_{n \to +\infty} \| f - g_n \|_1 = 0$$

$$\| \hat{f} - \hat{g}_n \|_\infty \leq \| f - g_n \|_1$$

$$\lim_{n \to +\infty} \| \hat{f} - \hat{g}_n \|_\infty = 0$$

$$\lim_{\xi \to +\infty} \hat{g}_n(\xi) = 0$$

75 Notation Différents opérateurs.

$T_a[f](x) = f(x-a)$: translation par a

$S_\lambda[f](x) = f(\lambda x)$: homothétie par λ

$M_\omega[f](x) = e^{-i2\pi\langle \omega, x\rangle} f(x)$: Multiplicateur.

76 Propriétés.

$$\mathcal{F}[f(x-a)](\xi) = e^{-i2\pi\langle \xi, a\rangle} \mathcal{F}[f(x)](\xi)$$

$$\mathcal{F}[f(\lambda x)](\xi) = \frac{1}{\lambda^d} \mathcal{F}[f(x)]\left(\frac{\xi}{\lambda}\right)$$

$$\mathcal{F}\left[e^{-i2\pi\langle \omega, x\rangle} f(x)\right](\xi) = \mathcal{F}[f(x)](\omega + \xi)$$

77 Propriété Soit $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$.

1) Si $x_j f(x) \in L^1(\mathbb{R}^d)$ alors $\frac{\partial}{\partial \xi_j} \mathcal{F}[f](\xi) = (-i2\pi) \mathcal{F}[x_j f]$

2) Si $f \in \mathcal{C}^1$ et $\frac{\partial f}{\partial x_j}(x) \in L^1$

alors $(i2\pi \xi_j) \mathcal{F}[f](\xi) = \mathcal{F}\left[\frac{\partial f}{\partial x_j}(x)\right](\xi)$.

preuve 1) On peut appliquer le th de dérivation sous $\int$.

2) Pour simplifier $j = 1$. On note $x = (x_1, \tilde{x})$, $\xi = (\xi_1, \tilde{\xi})$

Etape 1 On montre d'abord que

p.p. $\lim_{R \to +\infty} f(R, \tilde{x}) = 0$ $\lim_{R \to +\infty} f(-R, \tilde{x}) = 0$

En effet $f(R, \tilde{x}) = f(0, \tilde{x}) + \int_0^R \frac{\partial f}{\partial x_1}(t, \tilde{x})\, dt$.

Mais $\int_{\mathbb{R}^{d-1}} \int_{\mathbb{R}} \left|\frac{\partial f}{\partial x_1}(s, \tilde{x})\right| ds\, d\tilde{x} < +\infty$.

et donc pour presque tout $\tilde{x}$ $\frac{\partial f}{\partial x_1}(\cdot, \tilde{x}) \in L^1$.

la limite précédente existe : $\lim_{R \to +\infty} f(R, \tilde{x}) = f_\infty(\tilde{x})$

De plus $\int_{\mathbb{R}^{d-1}} \int_{\mathbb{R}} |f(s, \tilde{x})|\, ds\, d\tilde{x} < +\infty$

et donc pour presque tout $\tilde{x}$ $f(\cdot, \tilde{x}) \in L^1$

nécessairement $f_{\pm\infty}(\tilde{x}) = 0$.

Etape 2

$$\int_{-R}^{+R} f(x_1, \tilde{x}) e^{-i2\pi x_1 \xi_1} dx_1$$

$$= \left[\frac{f(x_1, \tilde{x}) e^{-i2\pi x_1 \xi_1}}{-i2\pi \xi_1} \right]_{-R}^{+R} + \frac{1}{i2\pi \xi_1} \int_{-R}^{+R} \frac{\partial f}{\partial x_1} e^{-i2\pi x_1 \xi_1} dx_1$$

En faisant tendre $R \to +\infty$. p.p. $(d\tilde{x})$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x_1, \tilde{x}) e^{-i2\pi x_1 \xi_1} dx_1 = \frac{1}{i2\pi \xi_1} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial f}{\partial x_1} e^{-i2\pi x_1 \xi_1} dx_1$$

Scanné avec CamScanner

Il reste à multiplier par $e^{-i2\pi\langle\tilde{x},\tilde{\xi}\rangle}$ et à intégrer par $d\tilde{x}$.

78 **Propriété** Si $f, g \in L^1(\mathbb{R}^d)$ alors $f*g \in L^1(\mathbb{R}^d)$ et $\mathcal{F}[f*g] = \mathcal{F}[f]\mathcal{F}[g]$ partout.

preuve On peut appliquer Fubini

$$\int \left[\int f(y)g(x-y)\,dy\right] e^{-i2\pi\langle x,\xi\rangle}\,dx$$
$$= \iint f(y)e^{-i2\pi\langle y,\xi\rangle}\, g(x-y)\, e^{-i2\pi\langle x-y,\xi\rangle}\,dx\,dy$$
$$= \mathcal{F}[f](\xi)\,\mathcal{F}[g](\xi). \qquad \blacksquare$$

79 **Propriété** $f(x) = e^{-\pi x^2}$, $\hat{f}(\xi) = e^{-\pi\xi^2}$ $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 1$

preuve Etape 1) On montre $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi x^2}\,dx = 1$.

On pose $F(\lambda) = \int_0^1 \frac{e^{-\lambda^2(1+x^2)}}{1+x^2}\,dx \quad G(\lambda) = \int_0^\lambda e^{-x^2}\,dx$

$$F'(\lambda) = -2\lambda\int_0^1 e^{-\lambda^2(1+x^2)}\,dx$$
$$= -2\lambda e^{-\lambda^2}\int_0^1 e^{-(\lambda x)^2}\,dx$$
$$= -2\lambda e^{-\lambda^2}\int_0^\lambda e^{-x^2}\,\frac{dx}{\lambda}$$
$$= -2e^{-\lambda^2}G(\lambda)$$
$$G'(\lambda) = e^{-\lambda^2}$$
$$(F+G^2)' = F' + 2GG' = 0$$
$$(F+G^2)(\lambda) = \text{cont} = (F+G^2)(0) = F(0) = \frac{\pi}{4}$$
$$(F+G^2)(+\infty) = \left(\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,dx\right)^2 = \frac{\pi}{4}.$$
$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi} \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi x^2}\,dx = 1$$

Etape 2) $\hat{f}(\xi) = \mathcal{F}[f](\xi) = \int e^{-\pi x^2} e^{-i2\pi\langle x,\xi\rangle} dx$

$\hat{f}(\xi) = \prod_{k=1}^{d} \hat{f}(\xi_k)$ On se ramène à $d=1$

$$\frac{d}{d\xi}\hat{f}(\xi) = (-i2\pi)\int x e^{-\pi x^2} e^{-i2\pi x\xi} dx$$

$$= (-i2\pi)\Big[\Big[\frac{-1}{2\pi} e^{-\pi x^2} e^{-i2\pi x\xi}\Big]_{-\infty}^{+\infty}$$

$$+ \frac{1}{2\pi}\int e^{-\pi x^2}(-i2\pi\xi) e^{-i2\pi x\xi} dx \Big]$$

$$= -2\pi\xi \hat{f}(\xi)$$

$\hat{f}(\xi) = C\exp(-\pi\xi^2)$ $\hat{f}(0) = 1$ ∎

IV. 2. Inversion de Fourier dans L^1

[Notations
$\mathcal{F}^{-1}[f](x) = \int f(\xi) e^{i2\pi\langle x,\xi\rangle} d\xi$

80 Théorème Soit $f \in L^1$. Supposons que $\hat{f} \in L^1$ alors.
p.p. $f(x) = \int \hat{f}(\xi) e^{i2\pi\langle x,\xi\rangle} d\xi$.
(En particulier f admet un représentant dans $L^1 \cap C_0^0$).

81 Lemme Pour tout $f \in L^1$ et $g \in L^1$

$$\int \hat{f} g = \int f \hat{g}$$

preuve $\int \hat{f}(\xi) g(\xi) d\xi$

$$= \int \Big[\int f(x)\exp(-i2\pi\langle x,\xi\rangle) dx\Big] g(\xi) d\xi$$

$$= \int f(x)\Big[\int g(\xi)\exp(-i2\pi\langle x,\xi\rangle) d\xi\Big] dx$$

Preuve du théorème $G_\lambda(\xi) = e^{-\lambda\pi\xi^2}$ $x_0 \in \mathbb{R}^d$

[méthode de sommation

$$\int \hat{f}(\xi)\exp(i2\pi\langle x_0,\xi\rangle) G_\lambda(\xi) d\xi$$

$$= \int f(x)\Big[\int \exp(i2\pi\langle x_0 - x, \xi\rangle) G_\lambda(\xi) d\xi\Big] dx.$$

$$= \int f(x)\Big[\int \Big(\frac{1}{\lambda}\Big)^{d/2}\exp\Big(i2\pi\Big\langle \frac{x_0 - x}{\sqrt{\lambda}}, \xi\Big\rangle\Big) e^{-\pi\xi^2} d\xi\Big] dx$$