Etape 2) $\hat{f}(\xi) = \mathcal{F}[f](\xi) = \int e^{-\pi x^2} e^{-i2\pi\langle x,\xi\rangle} dx$ (75)

$\hat{f}(\xi) = \prod_{k=1}^{d} \hat{f}(\xi_k)$ On se ramène à $d=1$

$$\frac{d}{d\xi}\hat{f}(\xi) = (-i2\pi)\int x e^{-\pi x^2} e^{-i2\pi x\xi} dx$$

$$= (-i2\pi)\left[\left[\frac{-1}{2\pi} e^{-\pi x^2} e^{-i2\pi x\xi}\right]_{-\infty}^{+\infty} + \frac{1}{2\pi}\int e^{-\pi x^2}(-i2\pi\xi) e^{-i2\pi x\xi} dx \right]$$

$$= -2\pi\xi \hat{f}(\xi)$$

$\hat{f}(\xi) = C\exp(-\pi\xi^2)$ $\hat{f}(0) = 1$

IV. 2. Inversion de Fourier dans L^1

Notations
$\mathcal{F}^{-1}[f](x) = \int f(\xi) e^{i2\pi\langle x,\xi\rangle} d\xi$

80 **Théorème** Soit $f \in L^1$. Supposons que $\hat{f} \in L^1$ alors.
p.p. $f(x) = \int \hat{f}(\xi) e^{i2\pi\langle x,\xi\rangle} d\xi$.
(En particulier f admet un représentant dans $L^1 \cap \mathcal{C}_0^0$).

81 **Lemme** Pour tout $f \in L^1$ et $g \in L^1$

$$\int \hat{f} g = \int f \hat{g}$$

preuve $\int \hat{f}(\xi) g(\xi) d\xi$

$$= \int\left[\int f(x)\exp(-i2\pi\langle x,\xi\rangle) dx\right] g(\xi) d\xi$$

$$= \int f(x)\left[\int g(\xi)\exp(-i2\pi\langle x,\xi\rangle) d\xi\right] dx$$

Preuve du théorème $G_\lambda(\xi) = e^{-\lambda\pi\xi^2}$ $x_0 \in \mathbb{R}^d$

[méthode de sommation

$$\int \hat{f}(\xi)\exp(i2\pi\langle x_0,\xi\rangle) G_\lambda(\xi) d\xi$$

$$= \int f(x)\left[\int \exp(i2\pi\langle x_0-x,\xi\rangle) G_\lambda(\xi) d\xi\right] dx.$$

$$= \int f(x)\left[\int \left(\frac{1}{\lambda}\right)^{d/2} \exp\left(i2\pi\left\langle \frac{x_0-x}{\sqrt{\lambda}}, \xi\right\rangle\right) e^{-\pi\xi^2} d\xi\right] dx$$

$$= \int f(x) \left(\frac{1}{\lambda}\right)^{\frac{d}{2}} \exp(-\pi \| \frac{x_0 - x}{\sqrt{\lambda}} \|^2)\, dx$$

on pose $\rho(x) = \exp(-\pi \|x\|^2)$ $\quad \rho_\varepsilon = \left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^d \exp\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$

$$= \int f(x)\, \rho_{\sqrt{\lambda}}(x_0 - x)\, dx$$

Comme $(\rho_\varepsilon)_{\varepsilon > 0}$ est une approximation de l'unité :

$$f * \rho_{\sqrt{\lambda}} \xrightarrow{L^1} f \quad \text{lorsque } \lambda \to 0$$

Pour une sous suite $(\lambda_n) \downarrow 0$

$$f * \rho_{\sqrt{\lambda_n}}(x_0) \to f(x_0) \text{ presque partout } dx_0.$$

De plus $G_{\lambda_n} \longrightarrow 1$ et par convergence dominée

$$\int \hat{f}(\xi) e^{i 2\pi \langle x_0, \xi \rangle} d\xi = f(x_0) \quad p.p.\ (dx_0)$$

82 - Corollaire La transformée de Fourier $f \in L^1(\mathbb{R}^d) \longmapsto \hat{f} \in C_0^0(\mathbb{R}^d)$ est injective.

preuve La preuve précédente montre que pour tout $f \in L^1$, alors même que $\hat{f} \in \mathcal{L}^1$, on a pour tout $x_0 \in \mathbb{R}^d$

$$\int \hat{f}(\xi)\, e^{i2\pi \langle x_0, \xi \rangle} G_\lambda(\xi)\, d\xi$$
$$= \int f(x)\, \rho_{\sqrt{\lambda}}(x_0 - x)\, dx$$

Si f et g ont même transformée de Fourier

$$f * \rho_{\sqrt{\lambda}} = g * \rho_{\sqrt{\lambda}} \quad \text{partout}$$

et comme $f * \rho_{\sqrt{\lambda}} \to f$ dans L^1, $g * \rho_{\sqrt{\lambda}} \to g$ dans L^1

on a $f = g$ dans L^1.

83 Exemple Loi de Laplace $f(x) = \frac{1}{2\lambda} \exp\left(-\frac{|x|}{\lambda}\right)$ $\quad \lambda > 0$

Alors $\hat{f}(\xi) = \dfrac{1}{1 + 4\pi^2 \xi^2 \lambda^2}$

preuve

$$2\lambda \hat{f}(\xi) = \int e^{-i2\pi x\xi - \frac{|x|}{\lambda}} dx$$

$$= \int_0^{+\infty} e^{-x(i2\pi\xi + \frac{1}{\lambda})} dx + \int_{-\infty}^0 e^{-x(i2\pi\xi - \frac{x}{\lambda})} dx$$

$$= \left[\frac{e^{-x(i2\pi\xi + \frac{1}{\lambda})}}{-(i2\pi\xi + \frac{1}{\lambda})} \right]_0^{+\infty} + \left[\frac{e^{-x(i2\pi\xi - \frac{1}{\lambda})}}{-(i2\pi\xi - \frac{1}{\lambda})} \right]_{-\infty}^0$$

$$= \frac{1}{i2\pi\xi + \frac{1}{\lambda}} - \frac{1}{i2\pi - \frac{1}{\lambda}} = \frac{-2/\lambda}{-(4\pi^2\xi^2 + \frac{1}{\lambda^2})}$$

$$= \frac{2\lambda}{1 + 4\pi^2\xi^2\lambda^2}$$

$\square$

84 Exemple Loi de Cauchy $f(x) = \dfrac{a}{\pi(x^2+a^2)}$

Alors $\hat{f}(\xi) = \exp\left(-\dfrac{a|\xi|}{2\pi}\right)$

preuve

$$\hat{f}(\xi) = \int \frac{a}{\pi(x^2+a^2)} e^{-i2\pi x\xi} dx$$

$$= \int \frac{1/a}{\pi\left(\left(\frac{x}{a}\right)^2+1\right)} e^{-i2\pi x\xi} dx$$

on pose $\lambda = \frac{1}{a}$ et on fait le changement de variable $x = 2\pi\eta$

$$\hat{f}|\xi| = \int \frac{2\lambda}{(4\pi^2\eta^2\lambda^2+1)} e^{i2\pi\eta\left(\frac{-\xi}{2\pi}\right)} d\eta$$

On reconnaît Fourier inverse de la transformée de Fourier de la loi de Laplace.

$$\hat{f}(\xi) = \exp\left(-\frac{|\xi|}{2\pi\lambda}\right)$$

$\blacksquare$

85 Théorème $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \Leftrightarrow \hat{f} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$

preuve $\hat{f}(\xi) = \mathcal{F}[f(x)]$

$$\partial^\alpha \hat{f}(\xi) = (-i2\pi)^{|\alpha|} \mathcal{F}[x^\alpha f(x)]$$

$$(i2\pi)\xi^\beta \partial^\alpha \hat{f}(\xi) = (-i2\pi)^{|\alpha|} \mathcal{F}[\partial^\beta (x^\alpha f(x))]$$

si $f \in \mathcal{S}$ alors $\partial^\beta (x^\alpha f(x)) \in L^1$
et donc $\xi^\beta \partial^\alpha \hat{f}(\xi) \in C_0^0 \subset C_b^0$
donc $\hat{f} \in \mathcal{S}$.

plus généralement
$P(\frac{\partial}{\partial \xi}) \mathcal{F}[f]$
$= \mathcal{F}[P(-i2\pi\xi) f]$

La réciproque utilise la formule

$$f(x) = \mathcal{F}^{-1}[\hat{f}(\xi)] = \int \hat{f}(\xi) e^{i2\pi x\xi} d\xi$$

$[P(i2\pi\xi)\mathcal{F}[f] = \mathcal{F}[P(\frac{\partial}{\partial x}) f]$

IV.3 Théorie L^2

On ne peut pas définir ponctuellement $\hat{f}$ si $f \in L^2$

86 Lemme Pour tout $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$.

$$\int f(x) \overline{g(x)} dx = \int \hat{f}(\xi) \overline{\hat{g}(\xi)} d\xi.$$

preuve

$$f(x) = \mathcal{F}^{-1}[\hat{f}] = \int \hat{f}(-\xi) e^{-i2\pi\xi x} d\xi.$$

on pose

$$h(\xi) = \hat{f}(-\xi) \quad \text{et donc} \quad f(x) = \mathcal{F}[h]$$

$$\int f(x)\overline{g(x)} dx = \int \hat{h}(x) \overline{g(x)} dx$$
$$= \int h(\xi) \hat{\overline{g}}(\xi) d\xi$$
$$= \int h(\xi) \overline{\hat{g}(-\xi)} d\xi$$
$$= \int \hat{f}(-\xi) \overline{\hat{g}(-\xi)} d\xi = \int \hat{f} \overline{\hat{g}} d\xi.$$