preuve $\hat{f}(\xi) = \mathcal{F}[f(x)]$

$$\partial^\alpha \hat{f}(\xi) = (-i2\pi)^{|\alpha|} \mathcal{F}[x^\alpha f(x)]$$

$$(i2\pi)\xi^\beta \partial^\alpha \hat{f}(\xi) = (-i2\pi)^{|\alpha|} \mathcal{F}[\partial^\beta(x^\alpha f(x))]$$

si $f \in \mathcal{S}$ alors $\partial^\beta(x^\alpha f(x)) \in L^1$

et donc $\xi^\beta \partial^\alpha \hat{f}(\xi) \in C_0^0 \subset C_b^0$

donc $\hat{f} \in \mathcal{S}$.

plus généralement
$$P\left(\frac{\partial}{\partial \xi}\right)\mathcal{F}[f] = \mathcal{F}[P(-i2\pi\xi) f]$$

La réciproque utilise la formule

$$f(x) = \mathcal{F}^{-1}[\hat{f}(\xi)] = \int \hat{f}(\xi) e^{i2\pi x\xi} d\xi$$

$$P(i2\pi\xi)\mathcal{F}[f] = \mathcal{F}\left[P\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) f\right]$$

IV.3 Théorie L^2

On ne peut pas définir ponctuellement $\hat{f}$ si $f \in L^2$

86 Lemme Pour tout $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$.

$$\int f(x)\overline{g(x)}\,dx = \int \hat{f}(\xi)\overline{\hat{g}(\xi)}\,d\xi.$$

preuve

$$f(x) = \mathcal{F}^{-1}[\hat{f}] = \int \hat{f}(-\xi) e^{-i2\pi\xi x} d\xi.$$

on pose

$$h(\xi) = \hat{f}(-\xi) \quad \text{et donc} \quad f(x) = \mathcal{F}[h]$$

$$\int f(x)\overline{g(x)}\,dx = \int \hat{h}(x)\overline{g(x)}\,dx$$
$$= \int h(\xi)\overline{\hat{g}}(\xi)\,d\xi$$
$$= \int h(\xi)\overline{\hat{g}(-\xi)}\,d\xi$$
$$= \int \hat{f}(-\xi)\overline{\hat{g}(-\xi)}\,d\xi = \int \hat{f}\,\overline{\hat{g}}\,d\xi.$$

87 Rappel $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ est dense dans $L^2(\mathbb{R}^d)$.

preuve Soit $(\rho_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ une approximation de l'unité à support compact. Si $f \in L^2$ et $\eta > 0$
il existe R tel que $\|f - f_R\|_2 < \eta$ avec $f_R = \mathbb{1}_{B(0,R)} f$
il existe ε tel que $\| f_R * \rho_\varepsilon - f_R \|_2 < \eta$.
De plus $f_R * \rho_\varepsilon \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^d) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ et

$$\|f - f_R * \rho_\varepsilon\|_2 < 2\eta.$$

■

88 Corollaire Soit $\mathcal{S} \subseteq L^2$ muni de produit hermitien $\langle f, g \rangle = \int f(x) \overline{g(x)}\, dx$. Alors $\mathcal{F} : \mathcal{S} \to \mathcal{S}$ est une isométrie d'inverse $\mathcal{F}^{-1}$.

preuve $\int |f(x)|^2 dx = \int |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi$.

Lemme
La transformée de Fourier sur $\mathcal{S}$ s'étend en une isométrie surjective sur L^2

89 Définition on appelle transformée de Fourier L^2 le prolongement par continuité de $\mathcal{F} : \mathcal{S} \to \mathcal{S}$. Si $f \in L^2$ et $(f_n)_{n \geq 0}$ est une suite de L^2 telle que

$$f = L^2\text{-}\lim_{n \to +\infty} f_n.$$

alors $\mathcal{F}[f] = L^2\text{-}\lim_{n \to +\infty} \mathcal{F}[f_n]$ et $\mathcal{F}[f]$ est indépendant du choix de $(f_n)_{n \geq 0}$.

preuve $(\mathcal{F}[f_n])_{n \geq 0}$ est une suite de Cauchy

$$\|\mathcal{F}[f_n] - \mathcal{F}[f_m]\|_2 = \|f_n - f_m\|_2$$

elle converge car L^2 est complet. De plus si $(f'_n)_{n \geq 0}$ vérifie aussi $f = L^2\text{-}\lim_{n \to +\infty} f'_n$
on construit $g_{2n} = f_n$ $g_{2n+1} = f'_n$
et $L^2\text{-}\lim_{n \to +\infty} g_n$ existe.

■

90 Corollaire Soit $f, g \in L^2(\mathbb{R}^d)$.

1) Identité de Plancherel

$$\int |f(x)|^2 dx = \int |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi.$$

2) Identité de Parseval.

$$\int f(x)\overline{g(x)}\, dx = \int \hat{f}(\xi)\,\overline{\hat{g}(\xi)}\, d\xi.$$

91 Remarque Si $f \in L^2 \cap L^1$ on vient de définir 2 notions de transformée de Fourier.

$$\mathcal{F}_1[f](\xi) = \int f(x) e^{-i2\pi\langle x,\xi\rangle} dx. \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^d$$

$$\begin{cases} \mathcal{F}_2[f] = L^2\text{-}\lim \mathcal{F}_1[f_n] \\ L^2\text{-}\lim f_n = f \quad \text{et } f_n \in \mathcal{S} \end{cases}$$

Alors $\mathcal{F}_1[f] = \mathcal{F}_2[f]$ p.p.

Il n'y a donc qu'une seule notion de Fourier.

preuve on peut trouver une suite $(f_n)_{n\geq 0}$, $f_n \in \mathcal{S}$, telle que : $f = L^1\text{-}\lim_{n\to+\infty} f_n$ et $f = L^2\text{-}\lim_{n\to+\infty} f_n$

d'une part

$$\begin{cases} \mathcal{F}_1[f_n] \to \mathcal{F}_1[f] \text{ uniformément sur } \mathbb{R}^d \\ \|\hat{f}_n - \hat{f}\|_\infty \leq \|f_n - f\|_1 \end{cases}$$

d'autre part

$\mathcal{F}_2[f_n] = \mathcal{F}_1[f_n] \to \mathcal{F}_2[f]$ dans L^2

il existe une sous suite $(n_k)_k \nearrow$ telle que

$$\mathcal{F}_2[f_{n_k}](\xi) \to \mathcal{F}_2[f](\xi) \quad \text{p.p.}$$

D'où $\mathcal{F}_2[f](\xi) = \mathcal{F}_1[f](\xi)$ p.p.

92 Exemple Si $f \in L^2$ alors

$$\mathcal{F}[f] = L^2\text{-}\lim \mathcal{F}_1[\mathbb{1}_{B(0,R)} f]$$

En particulier $\exists (R_n) \nearrow$ $\lim_{n\to+\infty} \int_{\|x\|\leq R_n} f(x) e^{-i2\pi\langle x,\xi\rangle} dx$ p.p.