IV.4 Complément

Nous commençons par montrer la non injectivité de $\mathcal{F} : L^1 \longrightarrow \mathcal{C}^0_0$.

93. Lemme Soit $f \in \mathcal{L}^\infty \cap \mathcal{L}^1$ et $(\rho_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ une approximation de l'unité. Alors

$$f(x) = \lim_{\varepsilon \to 0} f * \rho_\varepsilon(x)$$

en tout point de continuité de f.

preuve Soit $x_0 \in \mathbb{R}^d$ un point de continuité de f.

$$f*\rho_\varepsilon(x_0) - f(x_0) = \int [f(x_0 - y) - f(x_0)]\, \rho_\varepsilon(y)\, dy$$

$$|f*\rho_\varepsilon(x_0) - f(x_0)| \leq \int_{\|y\|>h} \rho_\varepsilon(y)\, dy \; 2\|f\|_\infty \quad (\mathrm{I})$$

$$+ \sup_{\|y\|<h} |f(x_0 - y) - f(x_0)| \quad (\mathrm{II})$$

Soit $\eta > 0$. On choisit h petit pour que $(\mathrm{II}) < \frac{\eta}{2}$.
h étant fixé, on choisit ε petit pour que $(\mathrm{I}) < \frac{\eta}{2}$.

94. Lemme
$$\begin{cases} \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{-\eta}^{+\eta} \operatorname{sinc}(\pi\xi)\, d\xi = 1 & (\mathrm{II}) \\ \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{sinc}(\pi\xi)\, e^{-\pi\varepsilon\xi^2}\, d\xi = 1 & (\mathrm{I}) \end{cases}$$

preuve (I) On remarque déjà que

voir plus loin pour la preuve de (II)

$\operatorname{sinc}(t) \notin L^1$ (intégrer sur $\bigsqcup_{n\in\mathbb{Z}} 2\pi n +]\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}[$

$$\operatorname{sinc}(\pi\xi) = \mathcal{F}[\mathbb{1}_{[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]}(x)]$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{sinc}(\pi\xi)\, e^{-\pi\varepsilon\xi^2}\, d\xi$$

$$= \int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} \mathcal{F}[e^{-\pi\varepsilon\xi^2}](x)\, dx,$$

$$= \int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} \mathcal{F}_\xi\left[e^{-\pi\xi^2}\right]\left(\frac{x}{\sqrt{\varepsilon}}\right) \frac{dx}{\sqrt{\varepsilon}}$$

$$= 1\!\!1_{[-\frac{1}{2},+\frac{1}{2}]} * \rho_{\sqrt{\varepsilon}}(0)$$

avec $\rho_{\sqrt{\varepsilon}}(x) = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \exp\left(-\pi \frac{x^2}{\varepsilon}\right)$.

le lemme précédent entraîne

$$1\!\!1_{[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]} * \rho_{\sqrt{\varepsilon}}(0) \to 1.$$

95 **Proposition** La transformée de Fourier sur L^1 n'est pas surjective sur $\mathcal{C}_0^0$

preuve On construit une fonction $g \in \mathcal{C}_0^0(\mathbb{R})$ qui n'est pas l'image par Fourier d'une fonction $f \in L^1(\mathbb{R})$.

On prend g impaire et vérifiant

$$\lim_{M \to +\infty} \int_1^M \frac{g(x)}{x} dx = +\infty$$

par exemple
$$\begin{cases} g(x) = \frac{1}{1+\ln(x)} 1\!\!1_{(x \geq 1)} + x 1\!\!1_{(0 \leq x \leq 1)} \\ g(x) = -g(-x), \ \forall x \leq 0. \end{cases}$$

$u = 1 + \ln(x)$, $du = \frac{dx}{x}$

$$\int_1^M \frac{dx}{x(1+\ln(x))} = \int_1^M \frac{du}{u} \longrightarrow +\infty.$$

Montrons par l'absurde que $\hat{f} = g$ est impossible.

$$g(\xi) = \int e^{-i2\pi x\xi} f(x)\, dx$$

$$= \int_0^{+\infty} \left[e^{-i2\pi x\xi} f(x) + e^{i2\pi x\xi} f(-x)\right] dx.$$

$$g(\xi) = -g(-\xi) = -\int_0^{+\infty} [e^{i2\pi x\xi} f(x) + e^{-i2\pi x\xi}] f(-x)\,dx$$

$$= \frac{1}{2}[g(\xi) - g(-\xi)]$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\infty} e^{i2\pi x\xi}[f(-x) - f(x)] + e^{-i2\pi x\xi}[f(x) - f(-x)]$$

$$= i\int_0^{\infty} \sin(2\pi x\xi)\,[f(-x) - f(x)]\,dx.$$

on pose $F(x) = i[f(-x) - f(x)] \in L^1(\mathbb{R})$.

$$g(\xi) = \int_0^{\infty} \sin(2\pi x\xi) F(x)\,dx$$

$$\int_1^M \frac{g(\xi)}{\xi}\,d\xi = \int_0^{\infty}\left[\int_1^M \frac{\sin(2\pi x\xi)}{\xi}\right] F(x)\,dx$$

Par le théorème de convergence dominée le membre de ~~droite~~ converge, mais celui de gauche diverge. ∎

96) Preuve de (II)

(a) on montre d'abord

$$\lim_{\sigma \to 0} \sup_M \int_0^M \left(1 - e^{-\pi\frac{\sigma}{M}\xi^2}\right) \operatorname{sinc}(\pi\xi)\,d\xi = 0.$$

changement de variable $u = \left(\frac{\xi}{\sqrt{\frac{M}{\sigma}}}\right)$.

$$\int_0^M \left(1 - e^{-\pi\frac{\sigma}{M}\xi^2}\right) \operatorname{sinc}(\pi\xi)\,d\xi$$

$$(*) \quad = \int_0^{\sqrt{\sigma M}} \frac{1 - e^{-\pi u^2}}{\pi u} \sin\left(\pi\sqrt{\frac{M}{\sigma}}\,u\right) du$$

on pose $p(u) = \frac{1 - e^{-\pi u^2}}{\pi u} = u - \frac{\pi}{2}u^3 + \dots$

on vérifie $\sup_{u \geq 0} \frac{p(u)}{u} < +\infty$ et $\sup_{u \geq 0} p'(u) < +\infty$

par IPP.

$$(*) = \left[-\rho(u) \frac{\cos\left(\pi\sqrt{\frac{M}{\sigma}}\, u\right)}{\pi\sqrt{\frac{M}{\sigma}}} \right]_0^{\sqrt{\sigma M}} + \int_0^{\sqrt{\sigma M}} \rho'(u) \frac{\cos\left(\pi\sqrt{\frac{M}{\sigma}}\, u\right)}{\pi\sqrt{\frac{M}{\sigma}}}\, du$$

$$= -\frac{\sigma}{\pi} \cdot \frac{\rho(\sqrt{\sigma M})}{\sqrt{\sigma M}} \cos(\pi M) + \frac{\sigma}{\pi} \frac{1}{\sqrt{\sigma M}} \int_0^{\sqrt{\sigma M}} \rho'(u) \cos\left(\pi\sqrt{\frac{M}{\sigma}}\, u\right) du$$

d'où la conclusion

(b) On montre ensuite

$$\forall \sigma > 0 \quad \lim_{M \to +\infty} \int_M^{+\infty} e^{-\pi \frac{\sigma}{M} \xi^2} \operatorname{sinc}(\pi \xi)\, d\xi = 0.$$

En effet

$$\left| \int_M^{+\infty} e^{-\pi \frac{\sigma}{M} \xi^2} \frac{\sin(\pi\xi)}{\pi\xi}\, d\xi \right| \leq \int_{\sqrt{\sigma M}}^{+\infty} \frac{e^{-\pi u^2}}{\pi u}\, du.$$

<u>Conclusion.</u>

$$\int_0^{+M} \operatorname{sinc}(\pi\xi)\, d\xi = \int_0^{+M} \left(1 - e^{-\pi \frac{\sigma}{M} \xi^2}\right) \operatorname{sinc}(\pi\xi)\, d\xi \quad (\mathrm{I})$$

$$- \int_M^{+\infty} e^{-\pi \frac{\sigma}{M} \xi^2} \operatorname{sinc}(\pi\xi)\, d\xi \quad (\mathrm{II})$$

$$+ \int_0^{+\infty} e^{-\pi \frac{\sigma}{M} \xi^2} \operatorname{sinc}(\pi\xi)\, d\xi \quad (\mathrm{III})$$

on choisit σ pour que (I) soit petit uniformément en M. pour σ fixé on choisit M grand pour que (II) soit petit et III proche de $\frac{\pi}{2}$.

97 Exemple

on cherche à résoudre l'équation de la chaleur

$$(*)\begin{cases} \partial_t u = \Delta u & \forall t \geq 0\ \forall x \in \mathbb{R}^d \\ u(0,x) = u_0(x) & \forall x \in \mathbb{R}^d \end{cases}$$

où $u : [0,+\infty[\times\mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$. et $u_0 : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$.

Il faut donner un sens aux dérivées partielles.
Pour l'instant on suppose $u_0 \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$. et on cherche u tel que

$$\begin{cases} \forall t \geq 0 \quad u(t,\cdot) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \\ \Delta u(t,x) = (\partial^2_{x_1x_1} + \partial^2_{x_2x_2} + \dots + \partial^2_{x_dx_d})\, u(t,x) \end{cases}$$

On appelle solution de $(*)$ une fonction $u : [0,+\infty[\times\mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ vérifiant

1) $\forall t \geq 0 \quad u(t,\cdot) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$
2) $\forall x \in \mathbb{R}^d\ \forall \alpha \in \mathbb{N}^d \quad \partial^\alpha u(\cdot,x) \in \mathcal{C}^0([0,+\infty[,\mathbb{R})$
3) $\forall t \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^d$
$$u(t,x) = u_0(x) + \int_0^t \Delta u(s,x)\, ds$$

98 Définition Il faut être plus précis.

Soit $u : [0,+\infty[\times\mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ tel que $\forall t \in [0,+\infty[\quad u(t,\cdot) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$. soit $t_0 \in [0,+\infty[$.

1) on dit que $u : [0,+\infty[\to \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ est continue en t_0 si
$\forall \alpha,\beta \in \mathbb{N}^d \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \eta > 0 \quad \forall t \in [0,+\infty[$
$$|t-t_0| < \eta \Rightarrow p_{\alpha\beta}(u(t) - u(t_0)) < \varepsilon.$$

2) On dit que $u \in \mathcal{C}^0([0,+\infty[,\mathcal{S})$ où $u : [0,+\infty[\to \mathcal{S}$ est continue en tout $t_0 \in [0,+\infty[$

99 Proposition. Soit $u_0 \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ Alors $(*)$ admet une unique solution dans $\mathcal{C}^0([0,+\infty[, \mathcal{S}(\mathbb{R}^d))$ donnée par $u_0 * p_t$ où $p_t(x) = \frac{1}{(4\pi t)^{d/2}} \exp\left(-\frac{\|x\|^2}{4t}\right)$.

preuve On suppose d'abord que u existe.

$$u(t,x) = u_0(x) + \int_0^t \Delta u(s,x)\,ds.$$

On note

$$\hat{u}(t,\xi) = \int e^{-i2\pi\langle x,\xi\rangle} u(t,x)\,dx.$$

D'où

$$\hat{u}(t,\xi) = \hat{u}_0(\xi) + \int_0^t \mathcal{F}[\Delta u(s,x)]\,ds.$$

$$= \hat{u}_0(\xi) + \int_0^t (i2\pi)^2 \|\xi\|^2 \hat{u}(s,\xi)\,ds$$

$$= \hat{u}_0(\xi) - 4\pi^2 \|\xi\|^2 \int_0^t \hat{u}(s,\xi)\,ds.$$

Pour tout $\xi \in \mathbb{R}^d$ $t \mapsto \hat{u}(t,\xi)$ est solution de l'ODE

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\hat{u}(t,\xi) = -4\pi^2\|\xi\|^2 \hat{u}(t,\xi) \\ \hat{u}(0,\xi) = \hat{u}_0(\xi) \end{cases}$$

D'où $\hat{u}(t,\xi) = \hat{u}_0(\xi)\exp(-4\pi\|\xi\|^2 t)$

$$\mathcal{F}^{-1}[\exp(-4\pi\|\xi\|^2 t)](x)$$

$$= \frac{1}{(\sqrt{4t})^d} \exp\left(-\frac{\|x\|^2}{4t}\right) = p_t(x)$$

D'où $\hat{u}(t,\xi) = \hat{u}_0(\xi)\,\hat{p}_t(\xi)$

$$u(t,x) = u_0 * p_t(x)$$

Réciproquement il faudrait vérifier que $u \in \mathcal{C}^0([0,\infty[,\mathcal{S})$ et est bien solution de $(*)$.