

III. 4 Dualité

(1)

Notation on suppose dans cette section que $(X, \mathcal{A}, \mu)$ est un espace mesuré σ -fini.

Définition Soit $h \in \mathcal{L}^0(X, \mathcal{A}, \mathbb{R}^+)$ (mesurable). on appelle mesure de densité h (par rapport à μ).
 $\nu = h\mu$ définie par $\nu(A) = \int_A h d\mu \quad \forall A \in \mathcal{A}$.

Remarque $\forall f \in \mathcal{L}^0(X, \mathcal{A}, \mathbb{R}^+)$ $\int f d\nu = \int fh d\mu$.

Lemme Soit $g, h \in \mathcal{L}^0(X, \mathcal{A}, \mathbb{R}^+)$. Alors.
 $g\mu = h\mu \iff g = h \mu.p.p.$

preuve (1) On suppose d'abord que $\mu(X) = 1$. Soit $\varepsilon > 0$ et $A = \{g > h + \varepsilon\}$ et supposons que $g\mu = h\mu$.

$$\int \{g > h + \varepsilon\} g d\mu = \int \{g > h + \varepsilon\} h d\mu.$$

$$\Rightarrow \varepsilon \mu(\{g > h + \varepsilon\}) \leq 0 \Rightarrow \mu(\{g > h + \varepsilon\}) = 0.$$

de même $\mu(\{g < h\}) = 0$ d'où $g = h \mu.p.p.$

Définition On dit qu'une mesure σ -finie ν est absolument continue par rapport à μ si
 $\forall A \in \mathcal{A}, [\mu(A) = 0 \Rightarrow \nu(A) = 0]$.
on écrit alors $\nu \ll \mu$.

Remarque Soit μ σ -finie, $\rho \in \mathcal{L}^0(X, \mathcal{A}, \mathbb{R}^+)$ et $\nu = \rho\mu$ alors ν est σ -finie et $\nu \ll \mu$.

Théorème Soit $(X, \mathcal{A})$ mesurable, (μ, ν) deux mesures σ -finies telles que $\nu \ll \mu$, alors il existe $f \in \mathcal{L}^0(X, \mathcal{A}; \mathbb{R}^+)$ tel que $\nu = f\mu$.

preuve ① on traite le cas $\mu(X) = 1$, et $\nu(X) = 1$ ②

on pose $\lambda = \mu + \nu$, $H = L^2(\lambda)$ espace de Hilbert réel et
 $\Phi(f) = \int f d\nu \quad \forall f \in H$. Alors Φ est une forme
 bilinéaire continue sur H - il existe $g \in H$ tel que,

$$\Phi(f) = \int f g d\lambda$$

$$\int f d\nu = \int f g d\nu + \int f g d\mu$$

$$\int f(1-g) d\nu = \int f g d\mu \quad \forall f \in H.$$

on montre que $g < 1$ μ -p.p. En effet :

$$f = 1(g > 1) \Rightarrow 0 < \int f(1-g) d\nu = \int f g d\mu \geq \mu(g > 1)$$

donc $\mu(\{g > 1\}) = 0$. Par absolue continuité on a

aussi $\nu(\{g > 1\}) = 0$. On montre que $g > 0$ λ -p.p.

En effet : $f \geq 0$ λ -p.p. $\Rightarrow f \geq 0$ ν -p.p. $\Rightarrow \Phi(f) = \int f g d\lambda \geq 0$

Pour $\varepsilon > 0$, $f = 1(g \leq -\varepsilon)$, $-\varepsilon \lambda(g \leq -\varepsilon) \geq 0 \Rightarrow \lambda(g \leq -\varepsilon) = 0$

Soit $f \in H$ quelconque ≥ 0 . En prenant

$$f_\varepsilon = \frac{f}{1-g} 1(g > \varepsilon) \quad \text{on obtient.}$$

$$\int_{(1-g)>\varepsilon} f d\nu = \int_{(1-g)>\varepsilon} f \frac{g}{(1-g)} d\mu$$

on pose $h = \frac{g}{1-g}$ μ -p.p. Par 3ème Levi, on obtient

$$\int f d\nu = \int f h d\mu \Rightarrow \nu = h\mu \text{ avec } h \geq 0 \text{ } \mu\text{-p.p.}$$

② le cas général : a priori

Rappel On s'intéresse au dual de $L^p(X, \mathcal{A}, \mu)$

pour $1 \leq p < +\infty$ ($p \neq +\infty$) : i.e. l'ensemble des formes
 linéaires (réelles ou complexes) continues :

$$\Phi : L^p(X, \mathcal{A}, \mu) \rightarrow \mathbb{K}.$$

$$|\Phi(f)| \leq \|\Phi\| \|f\|_p \quad \forall f \in L^p$$

$$\|\Phi\| = \inf \{ \pi \geq 0 : \forall f \in L^p \quad |\Phi(f)| \leq \pi \|f\|_p \}$$

(3)

Proposition Soit $p \in]1, +\infty[$ ou $p = +\infty$, q l'exposant conjugué, $g \in L^q$, et $\Phi: L^p \rightarrow \mathbb{K}$ définie par.

$$\Phi(f) = \int f g d\mu.$$

(on ne suppose pas que μ est σ -finie)

Alors $\Phi \in (L^p)'$ et $\|\Phi\| = \|g\|_q$.

preuve ① Cas $p \in]1, +\infty[$.

L'inégalité de Hölder donne $|\Phi(f)| \leq \|f\|_p \|g\|_q$,
d'où $\|\Phi\| \leq \|g\|_q$. Réciproquement, on pose.

$$g = e^{i\theta} |g| \quad f = \frac{e^{-i\theta} |g|^{q-1}}{\|g\|_q^{q-1}}$$

$$|f|^p = \frac{|g|^q}{\|g\|_q^q} \Rightarrow f \in L^p \text{ et } \|f\|_p = 1.$$

$$\text{de plus } \Phi(f) = \int \frac{|g|^q}{\|g\|_q^{q-1}} d\mu = \frac{\|g\|_q^q}{\|g\|_q^{q-1}} = \|g\|_q$$

$$\text{D'où } \left| \int f g d\mu \right| = \|g\|_q \leq \|\Phi\| \cdot \|f\|_p = \|\Phi\| \Rightarrow \|g\|_q \leq \|\Phi\|$$

② Cas $p = +\infty$, $g \in L^1$

L'inégalité de Hölder donne, $|\Phi(f)| \leq \|f\|_\infty \|g\|_1$

d'où $\|\Phi\| \leq \|g\|_1$. Réciproquement on pose.

$$g = e^{-i\theta} |g| \quad f = e^{i\theta} \in L^\infty \text{ et } \|f\|_\infty = 1$$

$$|\Phi(f)| = \left| \int f g d\mu \right| = \int |g| d\mu \leq \|\Phi\| \|f\|_1 = \|\Phi\|$$

d'où $\|\Phi\| \geq \|g\|_1$.

Proposition Soit $p = 1$, $q = +\infty$, $g \in L^\infty(X, \mathcal{A}, \mu)$ et

$\Phi: L^1 \rightarrow \mathbb{K}$ définie par $\Phi(f) = \int f g d\mu$.

On suppose ici μ σ -finie. Alors $\Phi \in (L^1)'$ et $\|\Phi\| = \|g\|_\infty$

preuve (as $\mu(X) = 1$, En fait le cas général englobe le cas particulier.

on rappelle la définition de $\|g\|_\infty$

$$\|g\|_\infty = \inf \{ M > 0 : \mu(\{|g| > M\}) = 0 \}$$

En particulier l'infimum est atteint et $\|g\|_\infty$ est uniquement déterminé dans le cas $\|g\|_\infty > 0$ par : $\forall \varepsilon > 0$

$$\begin{cases} \mu(\{|g| > \|g\|_\infty - \varepsilon\}) > 0 \\ \mu(\{|g| > \|g\|_\infty + \varepsilon\}) = 0 \end{cases}$$

Pour la suite la preuve on peut supposer $\|g\|_\infty > 0$.

Par inégalité Hölder $|\int f g d\mu| \leq \|g\|_\infty \|f\|_1$.

et donc $\|\Phi\| \leq \|g\|_\infty$. Réciproquement, on pose

$$g = e^{-i\theta} |g|, \quad M < \|g\|_\infty, \quad f = e^{i\theta} \mathbb{1}_{\{|g| > M\}} \frac{1}{\mu(\{|g| > M\})}$$

Alors $\|f\|_1 = 1$ et

$$\int f g d\mu = \int_{\{|g| > M\}} |g| \frac{dx}{\mu(\{|g| > M\})} \geq M.$$

D'où $\|\Phi\| \geq M$. Comme c'est vrai pour tout $M < \|g\|_\infty$.

on a bien $\|\Phi\| = \|g\|_\infty$.

② cas général : $g \in L^\infty$ et μ est σ -finie : $X = \bigcup_{n \geq 1} X_n$.

on a toujours $|\int f g d\mu| \leq \|f\|_1 \|g\|_\infty \Rightarrow \|\Phi\| \leq \|g\|_\infty$.

Réciproquement : soit $M < \|g\|_\infty$, $\mu(\{|g| > M\}) > 0$.

$$\mu(\{|g| > M\}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(\{|g| > M\} \cap X_n) \quad \text{car pour}$$

$$g = e^{i\theta} |g|$$

$$f = e^{-i\theta} \mathbb{1}_{\{|g| > M\} \cap X_n} \frac{1}{\mu(\{|g| > M\} \cap X_n)}$$

$$f \in L^1 \text{ et } \|f\|_1 = 1$$

$$\Phi(f) = \int |g| \mathbb{1}_{\{|g| > M\} \cap X_n} \frac{d\mu}{\mu(\{|g| > M\} \cap X_n)} \geq M$$

D'où $\|\Phi\| \geq M$ et donc $\|\Phi\| \geq \|g\|_\infty$.

(5)

objectif on cherche à montrer que $(L^p)'$ dans $\mathcal{E}$ car $p \in [1, +\infty[$ est donnée par les formes linéaires précédentes. Pour $p \in]1, +\infty[$ on n'a pas besoin de μ - fini ; pour $p = 1$ c'est faux pour certaine mesure non σ -finie. Cependant pour simplifier la preuve on suppose μ - fini.

Définition Soit $p \in [1, +\infty[$, une forme ($\mathbb{R}$ -linéaire) positive sur $L^p(X, \mathcal{A}, \mu, \mathbb{R})$ est une forme linéaire vérifiant

$$\forall f \in L^p_+, \Phi(f) \geq 0$$

Lemme Soit $p \in [1, +\infty[$, $\Phi \in (L^p(X, \mathcal{A}, \mu; \mathbb{R}))'$ une forme linéaire continue réelle. (on ne suppose pas μ σ -finie.) Soit pour tout $f \in L^p_+ = L^p(X, \mathcal{A}, \mu, \mathbb{R}^+)$

$$\Phi^+(f) := \sup \{ \Phi(q) : 0 \leq q \leq f, q \in L^p \}$$

Alors Φ^+ vérifie les propriétés : a) $\forall f \in L^p_+, \Phi^+(f) \geq 0$

b) $\forall \lambda \geq 0, \Phi^+(\lambda f) = \lambda \Phi^+(f)$

c) $\forall f_1, f_2 \in L^p_+, \Phi^+(f_1 + f_2) = \Phi^+(f_1) + \Phi^+(f_2)$

d) $\forall f \in L^p_+, |\Phi^+(f)| \leq \|\Phi\| \|f\|_p$

On vérifie uniquement que Φ^+ est additive.

D'un part $0 \leq q_1 \leq f_1, 0 \leq q_2 \leq f_2$.

$$\Phi^+(f_1 + f_2) \geq \Phi(q_1 + q_2) = \Phi(q_1) + \Phi(q_2).$$

$$\text{D'où } \Phi^+(f_1 + f_2) \geq \Phi^+(f_1) + \Phi^+(f_2)$$

D'autre part, soit $0 \leq g \leq f_1 + f_2$;

$$\text{Sur } \{g > 0\} \text{ on pose } g_i^p = \frac{g f_i}{f_1 + f_2} \quad i = 1 \text{ ou } 2$$

$$\text{Sur } \{g = 0\} \text{ on pose } g_i = 0.$$

$$\text{Alors } g_1 \leq f_1 \text{ et } g_2 \leq f_2 \text{ et } g = g_1 + g_2$$

(6)

D'où $\Phi(g) = \Phi(g_1) + \Phi(g_2) \leq \Phi^+(f_1) + \Phi^+(f_2)$
 et donc $\Phi^+(f_1 + f_2) \leq \Phi^+(f_1) + \Phi^+(f_2)$.

Théorème Soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré. On suppose que μ est σ -fini. Soit $p \in [1, +\infty[$ ($p \neq +\infty$) et $\Phi \in (L^p(X, \mathcal{A}, \mu))'$, soit q l'exposant conjugué. Alors il existe $g \in L^q(X, \mathcal{A}, \mu)$ tel que

$$\forall f \in L^p \quad \Phi(f) = \int f g d\mu.$$

Preuve On suppose d'abord que μ est une proba.

On note $\Psi = R_\mu(\Phi)$: forme linéaire continue réelle.

On note $\Psi^+(f) = \sup \{ \Phi(g) : 0 \leq g \leq f \}$ $\forall f \in L^p_+$

Le lemme précédent affirme : Ψ^+ vérifie la propriété :

a) $\Psi^+ : L^p_+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ (application positive).

b) positivement homogène $\lambda \geq 0, f \in L^p_+ \Rightarrow \Psi^+(\lambda f) = \lambda \Psi^+(f)$

c) additivité : $\forall f, g \in L^p_+ \quad \Psi^+(f+g) = \Psi^+(f) + \Psi^+(g)$

d) continue $\Psi^+(f) \leq M \|f\|_\infty$ $\forall f \in L^p_+$.

on montre alors que toute application Ψ^+ vérifiant a)-d)

s'écrit sous la forme $\Psi^+(f) = \int f h d\mu$ $\forall f \in L^p_+$

où $h \in L^q_+$.

En effet : on pose $\nu(A) = \Psi^+(\mathbb{1}_A)$ $\forall A \in \mathcal{A}$.

Alors ν est une mesure additive sur $\mathcal{A}$ ($\nu(\emptyset) = 0, \nu(X) = \Psi^+(\mathbb{1})$)

$\nu(A \cup B) = \nu(A) + \nu(B)$ pour $A \cap B = \emptyset$). on montre que ν est σ -additive.

Si $(A_n)_{n \geq 1}$ est une suite croissante et $A = \bigcup_{n \geq 1} A_n$.

$\mathbb{1}_A = \mathbb{1}_{A_n} + \mathbb{1}_{A \setminus A_n}$ (somme de 2 fonctions positives de L^p)

$\Psi^+(\mathbb{1}_A) = \Psi^+(\mathbb{1}_{A_n}) + \Psi^+(\mathbb{1}_{A \setminus A_n})$

mais $0 \leq \Psi^+(\mathbb{1}_{A \setminus A_n}) \leq C \|\mathbb{1}_{A \setminus A_n}\|_\infty =$

En la l.h de convergence dominée $\| \chi_{A_n} \|_\infty \rightarrow 0$
 donc $\psi^*(\chi_{A_n}) \rightarrow 0$ donc $\psi^*(h) = \lim \psi^*(\chi_{A_n})$ ou bien
 $\psi(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \psi(A_n)$.

En ailleurs $\nu(A) = 0 \Leftrightarrow \chi_A = 0$ dans $L^\infty \Rightarrow \psi^*(\chi_A) = 0 \Leftrightarrow \psi(A) = 0$
 $\nu \ll \mu$ et donc $\exists h \in L^1_+(\mu)$ t.q. $\nu = h \mu$,
 on vient de montrer que

$$\forall A \in \mathcal{A} \quad \psi^*(\chi_A) = \int_A h d\mu.$$

c'est encore vraie pour des fonctions simple positive.

$$\forall f = \sum_{i=1}^n a_i \chi_{A_i} \quad a_i \geq 0 \quad \psi^*(f) = \int f h d\mu.$$

c'est encore vraie pour $f \in L^1_+$ $f = \lim_{n \rightarrow \infty} \uparrow f_n$ (limite croissante de fonctions simples)

$$\psi^*(f) = \psi^*(f f_n) + \psi^*(f_n).$$

$$0 \leq \psi^*(f - f_n) \leq \int (f - f_n) h d\mu \rightarrow 0 \Rightarrow \psi^*(f - f_n) \rightarrow 0$$

$$\psi^*(f_n) = \int f_n h d\mu \rightarrow \int f h d\mu \text{ par Borel-Lévy.}$$

$$\text{donc } \psi^*(f) = \int f h d\mu \quad \forall h \in L^\infty_+.$$

on définit maintenant

$$\psi^-(f) = \psi^+(f) - \psi(f), \quad \forall f \in L^1_+$$

on constate que ψ^- vérifie a) - d), conclusion,

$$\psi^+(f) = \int f h^+ d\mu, \quad h^+ \in L^1_+(\mu) \quad \forall f \in L^1_+$$

$$\psi^-(f) = \int f h^- d\mu, \quad h^- \in L^1_+(\mu) \quad \forall f \in L^1_+$$

$$\psi(f) = \psi^+(f) - \psi^-(f) = \int f h d\mu, \quad h \in L^1(\mu) \quad \forall f \in L^1_+$$

Par linéarité de ψ et de $f \mapsto \int f h d\mu$ on a aussi

$$\psi(f) = \int f h d\mu \quad \forall f \in L^1.$$

Mais ψ est aussi continue pour L^p : il existe $M \geq 0$ tel que

$$|\psi(f)| \leq M \|f\|_p \quad \forall f \in L^p$$

on montre alors que $h \in L^q$. En effet

exercice $p = 1$. $e^{i\theta} = \operatorname{sgn}(f)$.
 $R = e^{i\theta} |R|$, $f = e^{-i\theta}$. $\mathbb{1}_{(|R| > M+\varepsilon)}$

$$|\psi(f)| \leq M \mu(|R| > M+\varepsilon), \quad |\psi(f)| = \int |R| \mathbb{1}_{(|R| > M+\varepsilon)} d\mu$$

$$\geq (M+\varepsilon) \mu(|R| > M+\varepsilon)$$

donc $\mu(|R| > M+\varepsilon) = 0$, $\|R\|_\infty \leq M$. $R \in L^\infty$

exercice $p > 1$. Soit $N \geq 0$

$$R = e^{i\theta} |R|, \quad f = e^{-i\theta} |R|^{q-1} \mathbb{1}_{|R| \leq N} \in L^\infty$$

$$|\psi(f)| = \int |R|^q \mathbb{1}_{|R| \leq N} d\mu \leq M \|f\|_p = M \left[\int |R|^q \mathbb{1}_{|R| \leq N} d\mu \right]^{\frac{1}{q}}$$

$$\left[\int |R|^q \mathbb{1}_{(|R| \leq N)} d\mu \right]^{\frac{1}{q}} \leq M.$$

Par Borel-Levi $\|R\|_q \leq M$. $R \in L^q$.