

I complément de la théorie de l'intégration

I, 1. Les espaces mesurés

but : lien
entre topologie
et Borélien

1 Définition Soit X un ensemble

- 1) Un ensemble $\mathcal{A}$ de parties de X est dite algèbre si
 - $\emptyset \in \mathcal{A}$, $X \in \mathcal{A}$, $\mathcal{A}$ stable par passage au complémentaire
 - $\mathcal{A}$ stable par intersection et réunion finies
- 2) Un ensemble $\mathcal{A}$ de parties de X est dite σ -algèbre (tribu) si
 - $\mathcal{A}$ est une algèbre
 - $\mathcal{A}$ est stable par intersection et réunion dénombrables.
- 3) On appelle σ -algèbre engendrée par un ensemble $\mathcal{C}$ parties de X , la plus petite σ -algèbre contenant $\mathcal{C}$ (l'intersection de toutes les σ -algèbres contenant $\mathcal{C}$) on note $\sigma(\mathcal{C})$ la σ -algèbre engendrée.
- 4) On dit qu'une σ -algèbre $\mathcal{A}$ est dénombrablement engendrée s'il existe un ensemble $\mathcal{C}$ de parties de X dénombrable tel que $\mathcal{A} = \sigma(\mathcal{C}) \Rightarrow$ voir Lemme 5

après 5

bonne conclusion
pas des espaces
vectoriels généraux

(X, d) est un espace métrique. En fait, on prendra $X = \mathbb{R}^n$, mais beaucoup de résultats sont valables pour des espaces (X, d) quelconques.

2 Définition Soit (X, d) un espace métrique

- 1) On dit que X est séparable si X contient une partie dénombrable dense
- 2) On dit que (X, d) est séparable si X est séparable et complet
- 3) On appelle σ -algèbre σ -algèbre de boréliens de X , la σ -algèbre engendrée par les ouverts de X , on note $\mathcal{B}_X$

Par définition les boréliens sont des parties de X fortement liées à la topologie de X . On cherche à comprendre le lien entre les deux types d'objets. (2)

3 Théorème des classes monotones Soit X un ensemble ($\neq \emptyset$)

Soit $\mathcal{I}$ et $\mathcal{M}$ deux ensembles de parties de X . On suppose que

1) $\mathcal{I}$ est un π -système, i.e., $\mathcal{I}$ est stable par intersection finie

2) $\mathcal{M}$ est une classe monotone :

- $X \in \mathcal{M}$

- $\mathcal{M}$ stable par différence propre :

$$A \subset B, A, B \in \mathcal{M} \Rightarrow B \setminus A \in \mathcal{M}$$

- $\mathcal{M}$ est stable par réunion dénombrable

Alors $\mathcal{I} \subset \mathcal{M} \Rightarrow \sigma(\mathcal{I}) \subset \mathcal{M}$

preuve. on note $\lambda(\mathcal{I})$ la plus petite classe monotone

contenant $\mathcal{I}$ (l'intersection des classes monotones

contenant $\mathcal{I}$). On cherche donc à montrer que $\lambda(\mathcal{I}) = \sigma(\mathcal{I})$.

Étape 1: Soit $S \in \mathcal{I}$ on pose

$$\mathcal{M} = \{A \in \lambda(\mathcal{I}) : A \cap S \in \lambda(\mathcal{I})\} \text{ On constate}$$

- $X \in \mathcal{M}$ (car $S \in \lambda(\mathcal{I})$)

- $A, B \in \mathcal{M}, B \supset A, \Rightarrow (B \setminus A) \cap S = (B \cap S) \setminus (A \cap S)$

$$B \cap S, A \cap S \in \lambda(\mathcal{I}), (B \cap S) \supset (A \cap S),$$

$$(B \setminus A) \cap S \in \lambda(\mathcal{I}) : \mathcal{M} \text{ stable par différence propre}$$

- $A_n \in \mathcal{M}, A_n \subset A_{n+1} \Rightarrow A_n \cap S \in \lambda(\mathcal{I}), A_n \cap S \subset A_{n+1} \cap S$

$$\bigcup_n A_n \cap S = \bigcup_n (A_n \cap S) \in \lambda(\mathcal{I})$$

$$\bigcup_n A_n \in \mathcal{M} : \mathcal{M} \text{ stable par } \bigcup \text{ dénombrable.}$$

on vient de montrer que $\mathcal{M}$ est une classe monotone (3)
 donc $\mathcal{M} \supset \lambda(\mathcal{X})$ mais $\mathcal{M} \subset \lambda(\mathcal{X})$ par définition $\mathcal{M} = \lambda(\mathcal{X})$.
conclusion : $\lambda(\mathcal{X})$ vérifie une propriété supplémentaire

$$\forall S \in \mathcal{X}, \forall A \in \lambda(\mathcal{X}), A \cap S \in \lambda(\mathcal{X})$$

Étape 2 : Soit $S \in \lambda(\mathcal{X})$ on pose :

$$\mathcal{M} = \{ A \in \lambda(\mathcal{X}) : A \cap S \in \lambda(\mathcal{X}) \}$$

On montre comme précédemment que $\mathcal{X} \in \mathcal{M}$, $\mathcal{M}$ est stable par différence propre, et $\mathcal{M}$ est stable par $\cup$ dénombrable.

A nouveau $\mathcal{M} = \lambda(\mathcal{X})$ et on obtient

conclusion $\lambda(\mathcal{X})$ vérifie la propriété :

$$\forall A, B \in \lambda(\mathcal{X}) \quad A \cap B \in \lambda(\mathcal{X})$$

$\lambda(\mathcal{X})$ est stable par intersection quelconque finie.

Étape 3 : $\lambda(\mathcal{X})$ est une σ -algèbre : il reste à montrer $\lambda(\mathcal{X})$ stable par $\cap$ et $\cup$ quelconques dénombrables.

$$A_n \in \lambda(\mathcal{X}) \quad B_n = \bigcap_{k=0}^n A_k \Rightarrow B_n \in \lambda(\mathcal{X}), \quad X \setminus B_n \in \lambda(\mathcal{X})$$

$$\cup \uparrow (X \setminus B_n) = X \setminus (\cap \downarrow B_n) \in \lambda(\mathcal{X}),$$

$$\Rightarrow \cap \downarrow B_n = \cap A_n \in \lambda(\mathcal{X})$$

$\lambda(\mathcal{X})$ est stable par $\cap$ dénombrable et donc par $\cup$ dénombrable. $\lambda(\mathcal{X})$ est une σ -algèbre contenant $\mathcal{X}$ c'est aussi la plus petite σ -algèbre contenant $\mathcal{X}$.

Étape 4 $\lambda(\mathcal{X}) = \sigma(\mathcal{X})$.

4 Théorème des classes monotones (Lévi) Soit X un ensemble ($\neq \emptyset$)

Soit $\mathcal{X}$ une algèbre de parties de X . Soit $\mathcal{M}$ une

classe monotone au sens suivant : $\mathcal{M}$ ens. de parties de X

• $\mathcal{M}$ stable par $\cup \uparrow$ dénombrable

• $\mathcal{M}$ stable par $\cap \downarrow$ dénombrable

Alors $\mathcal{F} \subset \mathcal{M} \Rightarrow \sigma(\mathcal{F}) \subset \mathcal{M}$.

contre exemple (4)

$\mathcal{M}$ monotone non σ -algèbre : $X = \mathbb{N}$ et l'ensemble des parties de X finies ou co-finites

5 Lemme Soit $\mathcal{A}$ une σ -algèbre dénombrablement engendrée. Alors il existe une algèbre $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$ dénombrable telle que $\sigma(\mathcal{B}) = \mathcal{A}$.

preuve Soit $\mathcal{C} \subset \mathcal{A}$ un ensemble de parties de X qui engendre $\mathcal{A}$ ($\sigma(\mathcal{C}) = \mathcal{A}$). On peut supposer que $\mathcal{C} \ni \bar{X}$ (quitte à le rajouter). Soit $\mathcal{D} = \{A \subset \bar{X} : A \in \mathcal{C} \text{ ou } X \setminus A \in \mathcal{C}\}$. $\mathcal{D}$ est dénombrable. Soit $\mathcal{E}$ l'ensemble des parties de X obtenues par intersection finie d'éléments de $\mathcal{D}$.
 $\Rightarrow \mathcal{E}$ devient une semi-algèbre.

• $X \in \mathcal{E}$

• $\mathcal{E}$ stable par $\cap$ finie

• pour tout $A \in \mathcal{E}$, $X \setminus A$ est une réunion finie d'éléments de $\mathcal{E}$ (on fait de $\mathcal{D}$)

Soit $\mathcal{B}$ l'ensemble des parties de X obtenues par réunion finie d'éléments de $\mathcal{E}$.

$\Rightarrow \mathcal{B}$ est une algèbre. Il suffit de vérifier que $\mathcal{B}$ est stable par passage au complémentaire

$$X \setminus \left(\bigcup_{k=1}^m \bigcap_{l=1}^n A_{k,l} \right) = \bigcap_{k=1}^m \left(\bigcup_{l=1}^n X \setminus A_{k,l} \right) \\ = \bigcup_{\alpha: [1,m] \rightarrow [1,n]} \bigcap_{k=1}^m (X \setminus A_{k,\alpha(k)})$$

où $A_{k,l} \in \mathcal{D}$ et donc $X \setminus A_{k,l} \in \mathcal{E}$.

I.2 Régularité des mesures de proba

Désormais X est muni d'une topologie et pour simplifier (X, d) est un espace métrique.

$\rightarrow$ voir (2)

Exemple 1 $\mathbb{R}^d$ espace polonais
 2 $X = \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ plans de Cantor (non dénombrable)

3 $X = [0,1]^{\mathbb{N}}$ cube de Hilbert

4 $X = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ polonais