

6 Définition Soit (X, d) un espace métrique

La σ -algèbre engendrée par les ouverts s'appelle la σ -algèbre des boréliens. On note par $\mathcal{B}_X$ cette σ -algèbre.

Définition Soit X un ensemble quelconque et $\mathcal{A}$ une σ -algèbre de X

① une mesure (σ -additive) μ est une fonction $\mu : \mathcal{A} \rightarrow [0, +\infty[\cup \{+\infty\}$ telle que.

$$\mu(\emptyset) = 0 \text{ et } \mu\left(\bigcup_{n \geq 0} B_n\right) = \sum_{n \geq 0} \mu(B_n)$$

pour toute famille de boréliens disjoints B_n .

② une mesure est dite σ -finie, s'il existe $(B_n)_{n \geq 0}$ une suite croissante de $B_n \in \mathcal{A}$ et $\mu(B_n) < +\infty$

③ une mesure est dite de probabilité si $\mu(X) = 1$.

Remarque Définition de $L^1(X, \mathcal{A}, \mu)$ et $L^2(X, \mathcal{A}, \mu)$.
Désormais toutes nos mesures sont σ -additives et σ -finies et comme elles sont σ -finies, on peut supposer souvent dans les preuves qu'elles sont de probabilité.

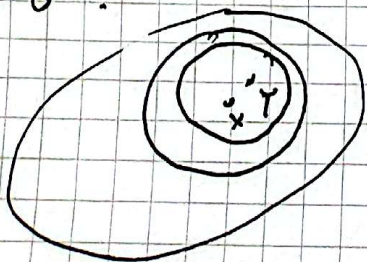
7 Proposition Soit (X, d) un espace métrique séparable.
Alors $\mathcal{B}_X$ est dénombrablement engendré

preuve On appelle Y une partie dense dénombrable

On note $\mathcal{C} = \{B(y, r) : y \in Y \text{ et } r \in \mathbb{Q} \cap]0, +\infty[\}$

$\mathcal{C}$ est dénombrable et on va montrer que $\sigma(\mathcal{C}) = \mathcal{B}_X$.

En effet on montre que tout ouvert et réunion d'éléments de $\mathcal{C}$:



si $x \in U$, on choisit $\varepsilon > 0$ tel que

$B(x, 3\varepsilon) \subset U$, on choisit $y \in Y$

tel que $B(x, \varepsilon) \ni y$

Alors

$$x \in B(y, \varepsilon) \subset B(y, 2\varepsilon) \subset U$$

on choisit enfin $z \in]\varepsilon, 2\varepsilon[\cap \mathbb{Q}$
 et $x \in B|y, z) \in U$.

(6)

8 Lemme Soit X un ensemble, $\mathcal{A}$ une σ -algèbre sur X , $\mathcal{B}$ une algèbre telle que $\sigma(\mathcal{B}) = \mathcal{A}$, et μ une mesure de probabilité sur $\mathcal{A}$. Alors.

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \forall A \in \mathcal{A} \quad \exists B \in \mathcal{B} \text{ t.q. } \mu(A \Delta B) < \varepsilon$$

preuve on appelle

$$\mathcal{C} = \{A \in \mathcal{A} : \forall \varepsilon > 0 \exists B \in \mathcal{B} \text{ t.q. } \mu(A \Delta B) < \varepsilon\}$$

on va montrer que $\mathcal{C}$ est une σ -algèbre. Comme

$$\mathcal{C} \supset \mathcal{B}, \text{ on aura bien montré } \mathcal{A} = \sigma(\mathcal{B}).$$

$$\text{on remarque d'abord : } A \Delta B = |1_A - 1_B|$$

on vérifie maintenant les 3 axiomes

$$1) \emptyset \in \mathcal{C}$$

2) $\mathcal{C}$ stable par passage au complémentaire

$$1_{(X \setminus A)} = 1 - 1_A$$

$$\Rightarrow 1_{A \Delta B} = |1_A - 1_B| = 1_{(X \setminus A) \Delta (X \setminus B)} = 1_{A^c \Delta B^c}$$

$$\Rightarrow \mu(A \Delta B) = \mu((X \setminus A) \Delta (X \setminus B))$$

3) $\mathcal{C}$ stable par réunion finie : $\varepsilon > 0, \sum_{n=1}^N \varepsilon_n < \varepsilon$

$$A = \bigcup_{n=1}^N A_n \quad B = \bigcup_{n=1}^N B_n \quad \mu(A_n \Delta B_n) < \varepsilon_n$$

$$A \setminus B = \bigcup_{n=1}^N A_n \cap \bigcap_{m=1}^N (X \setminus B_m) \subset \bigcup_{n=1}^N A_n \setminus B_n$$

$$B \setminus A \subset \bigcup_{n=1}^N B_n \setminus A_n$$

$$\Rightarrow A \Delta B \subset \bigcup_{n=1}^N A_n \Delta B_n$$

$$\mu(A \Delta B) \leq \sum_{n=1}^N \mu(A_n \Delta B_n) < \sum_{n=1}^N \varepsilon_n < \varepsilon$$

4) $\mathcal{C}$ stable par réunion dénombrable

$$A = \bigcup_{n \geq 1} A_n \quad \mu(A_n \Delta B_n) < \varepsilon/2$$

$$\int |1_A - 1_{B_n}| d\mu \leq \int |1_A - 1_{A_n}| d\mu + \int |1_{A_n} - 1_{B_n}| d\mu$$

$$\mu(A \Delta B_n) \leq \frac{\varepsilon}{2} + \mu(A \setminus A_n)$$

comme $n \geq \frac{1}{\varepsilon} \downarrow (A \setminus A_n) = \emptyset \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A \setminus A_n) = 0$

on choisit n tel que $\mu(A \setminus A_n) < \frac{\varepsilon}{2}$

$$\Rightarrow \mu(A \Delta B_n) < \varepsilon$$

9 Théorème Soit (X, d) un espace métrique séparable et μ une mesure de probabilité sur $\mathcal{B}_X$. Alors, $L^1(X, \mu)$ est un espace séparable.

Rappel $L^1(X, \mu) = \{f: X \rightarrow \mathbb{K} \text{ Borél t.q. } \int |f| d\mu < +\infty\}$
et $L^1 = L^1 / \sim$ où $f \sim g \Leftrightarrow \mu\{f \neq g\} = 0$.

preuve Soit $\mathcal{C}$ une algèbre dénombrable de $\mathcal{B}_X$ engendrant $\mathcal{B}_X$. on appelle $\mathcal{E}$ l'espace vectoriel des fonctions simples ~~à valeurs dans~~ $\mathbb{Q}$ (si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$) ou bien dans $\mathbb{Q} + i\mathbb{Q}$ (si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$). on appelle $f: X \rightarrow \mathbb{K}$ est simple si $f = \sum_{k=1}^N a_k \mathbb{1}_{A_k}$ avec $a_k \in \mathbb{K}$ et $A_k \in \mathcal{B}_X$. On prendra alors pour $\mathcal{E}$ les fonctions simples où $a_k \in \mathbb{Q}$ ou $\mathbb{Q} + i\mathbb{Q}$ et $A_k \in \mathcal{C}$.

Étape 1: Les fonctions simples Borel à valeurs rationnelles sont denses dans $L^1(X, \mu)$. En effet.

$$f = f_R + i f_I \quad f_R = f_R^+ - f_R^-$$

$$f_R^+ = \max(0, f_R) \quad f_R^- = \max(0, -f_R)$$

Il suffit de vérifier que tout $f: X \rightarrow \mathbb{R}^+$ dans L^1 est approchable dans L^1 par des fonctions simples.

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^{2^n-1} \frac{k}{2^n} \mathbb{1}_{\left\{ \frac{k}{2^n} \leq f \leq \frac{k+1}{2^n} \right\}}(x) \leq f(x)$$

(la limite est réalisée pour tout $x \in X$).

De plus la limite est croissante. Le théorème de convergence dominée entraîne la convergence dans L^1 . ⑧

Étape 2 Les fonctions simples $\mathcal{E}$ -mesurable à valeurs rationnelles sont denses dans $L^1(X, \mu)$: En effet si $f = \sum_{k=1}^N a_k \mathbb{1}_{A_k}$ $a_k \in \mathbb{Q}$ ou $\mathbb{Q} + i\mathbb{Q}$ et $A_k \in \mathcal{B}_X$ alors pour $\varepsilon > 0$ donné on peut choisir $\mathcal{B}_k \in \mathcal{E}$ tel que $\mu(A_k \Delta \mathcal{B}_k) < \varepsilon$. On pose $g = \sum_{k=1}^N a_k \mathbb{1}_{\mathcal{B}_k}$. Alors $\|f - g\|_1 \leq (\sum_{k=1}^N |a_k|) \varepsilon$ et g est bien un élément de $\mathcal{E}$. (voir lemme 8)

Remarque Le théorème 9 est vrai plus généralement pour X quelconque, $\mathcal{A}$ une σ -algèbre dénombrablement engendrée et μ une mesure sur $\mathcal{A}$ σ -finie.

Comme la définition de $\mathcal{B}_X$ est portamment dépendante de la topologie, nous allons voir que, pour une mesure de probabilité, $L^1(X, \mu)$ est portamment relié à $\mathcal{C}_b^0(X, \mathbb{K})$. On voit déjà que $\mathcal{C}_b^0(X, \mathbb{K}) \subseteq L^1(X, \mu)$. On va montrer que $\mathcal{C}_b^0$ est dense dans L^1 pour la norme L^1 .

11 Proposition [Régularité de mesures] Soit (X, d) un espace métrique et $\mu: \mathcal{B}_X \rightarrow [0, 1]$ une mesure de probabilité. Alors

$\forall \varepsilon > 0 \quad \forall B \in \mathcal{B}_X \quad \exists F$ fermé $\exists U$ ouvert tel que $F \subset B \subset U$ et $\mu(U \setminus F) < \varepsilon$.

On dit que μ est régulière

Soit $\mathcal{A} = \{B \in \mathcal{B}_X : \forall \varepsilon \exists F \text{ fermé } \exists U \text{ ouvert t.q. } \begin{matrix} F \subset B \subset U \\ U \setminus F \text{ est } \mu\text{-négligeable} \end{matrix}\}$ (9)

on montre que $\mathcal{A}$ est une σ -algèbre contenant les ouverts.

1) $\mathcal{A}$ contient les ouverts. Soit U ouvert de X . ou bien $U = X$ alors $F = U$ est fermé. Ou bien $U \neq X$, on pose alors $F_\varepsilon = \{x \in X : d(x, X \setminus U) \geq \varepsilon\}$. On a alors

$$F_\varepsilon \text{ fermé, } F_\varepsilon \subset U, \bigcup_{\varepsilon > 0} F_\varepsilon = U$$

$$(F_n)_{n \geq 1} \text{ est croissante de réunion } U$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mu(U \setminus F_n) = 0$$

2) $\mathcal{A}$ contient $\emptyset$ et X en particulier

3) $\mathcal{A}$ est stable par passage au complémentaire

$$F \subset B \subset U \Rightarrow X \setminus U \subset X \setminus B \subset X \setminus F$$

4) $\mathcal{A}$ est stable par réunion dénombrable. soit $\varepsilon > 0$.

et $(B_n)_{n \geq 0}$ des éléments de $\mathcal{A}$. on choisit $(\varepsilon_n)_{n \geq 0}$

qu'on finira ultérieurement $(\sum_{n \geq 0} \varepsilon_n < \frac{\varepsilon}{2})$

$\exists F_n$ fermé, $\exists U_n$ ouvert t.q.

$$F_n \subset B_n \subset U_n \quad \mu(U_n \setminus F_n) < \varepsilon_n$$

$$(\bigcup_{n \geq 0} U_n) \setminus (\bigcup_{n \geq 0} F_n) \subset \bigcup_{n \geq 0} (U_n \setminus F_n)$$

soit $U = \bigcup_{n \geq 0} U_n$ et $G = \bigcup_{n \geq 0} F_n$. Alors.

$$G \subset \bigcup_{n \geq 0} B_n \subset U \quad \mu(U \setminus G) < \sum_{n \geq 0} \varepsilon_n < \frac{\varepsilon}{2}$$

De plus $G_n = \bigcup_{k=0}^n F_k \quad \bigcup_{n \geq 0} G_n = G$

$$G_n \text{ fermé, } \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(G \setminus G_n) = 0$$

on choisit n tel que $\mu(G \setminus G_n) < \frac{\varepsilon}{2}$. Alors

$$G_n \subset \bigcup_{n \geq 0} B_n \subset U \quad \mu(U \setminus G_n) < \varepsilon \quad \blacksquare$$

Corollaire (X, d) métrique et $\mu: \mathcal{B}_X \rightarrow [0, +\infty]$ σ -additive
et U compact. Alors μ est régulière comme précédemment

(12) Théorème Soit (X, d) un espace métrique, μ proba. (16)
 Alors $\mathcal{C}_b^0(X, \mathbb{R})$ est dense dans $L^1(X, \mu)$

preuve On a déjà vu que l'ensemble des fonctions simple Borel est dense dans $L^1(X, \mu)$. Il reste donc à montrer que les fonctions indicatrice de Boreliens sont approchables par des fonctions continues bornées : Soit $B \in \mathcal{B}_X$, $\varepsilon > 0$,

$\exists F$ borne, $\exists U$ ouvert t.q.

$F \subset B \subset U$ et $\mu(U \setminus F) < \varepsilon$.

Soit $\varphi(x) = \frac{d(x, X \setminus U)}{d(x, F) + d(x, X \setminus U)}$ ($\varphi = 1$ si $U = X$)

Alors $\mathbb{1}_F \leq \varphi \leq \mathbb{1}_U$

$|\mathbb{1}_B - \varphi| \leq |\mathbb{1}_U - \mathbb{1}_F|$

Faire le cas particulier $F = \emptyset$ ou $U = X$

$\int |\mathbb{1}_B - \varphi| d\mu \leq \mu(U \Delta F) < \varepsilon$.

On préfère plutôt $\mathcal{C}_c^0(X, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions continues à support compact

13 Rappel Si $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction quelconque sur (X, d) un espace métrique. Le support de f est
 $\text{supp}(f) = \text{adh} \{x \in X : f(x) \neq 0\}$

En fait, est-ce qu'il y a beaucoup d'ensembles compacts dans X ? Rappelons que $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ n'est pas localement compact, mais séparable, en particulier complet. La complétude est très utile pour construire beaucoup de compacts. On commence par un lemme classique.

14 Lemme Soit (X, d) un espace métrique complet. Soit $F \subset X$ une partie quelconque. Alors F est relativement compact (F compact) si pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un ensemble fini de points $\{x_1, \dots, x_n\} \subset X$ tels que $F \subset \bigcup_{i=1}^n B(x_i, \varepsilon)$. (La dernière propriété est appelée "totalement bornée" ou précompact).

Preuve Totalement bornée $\Rightarrow$ relativement compact.

Soit $(x_n)_{n \geq 0}$ une suite de F et $(y_n)_{n \geq 0}$ une suite de F telle que $d(x_n, y_n) < \frac{1}{n+1}$. On montre qu'une sous suite de $(y_n)_{n \geq 0}$, soit $(y_{\sigma(n)})_{n \geq 0}$, $\sigma: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ strictement croissante, est de Cauchy. Par compacité, elle converge. On aura alors montré que $(x_{\sigma(n)})_{n \geq 0}$ converge. On construit par récurrence des sous suites, $\sigma_n: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ strictement croissantes : on écrit $\sigma_n \uparrow: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$

- $\{y_n : n \geq 0\} \subset F \subset \bigcup_{x \in S_1} B(x, 1)$, $|S_1| < +\infty$
il existe donc $x_1 \in X$ tel que $\forall n \geq 0 : y_n \in B(x_1, 1)$
Soit $\sigma_1 \uparrow: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ tel que $y_{\sigma_1(n)} \in B(x_1, 1)$
- $\{y_{\sigma_1(n)} : n \geq 0\} \subset F \subset \bigcup_{x \in S_2} B(x, \frac{1}{2})$, $|S_2| < +\infty$
il existe $x_2 \in X$ tel que $\forall n : y_{\sigma_1(n)} \in B(x_2, \frac{1}{2})$
Soit $\sigma_2 \uparrow: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ tel que $y_{\sigma_1 \circ \sigma_2(n)} \in B(x_2, \frac{1}{n})$
- Plus généralement, il existe $x_N \in X$, $\sigma_N \uparrow: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$
tels que $z_n = y_{\sigma_1 \circ \dots \circ \sigma_N(n)} \in B(x_N, \frac{1}{n})$
- On pose $\sigma(n) = \sigma_1 \circ \dots \circ \sigma_N(n)$ (procédure de diagonalisation de Cantor) Alors $\sigma \uparrow: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ et
 $\forall N \geq 1 \quad \forall n \geq N \quad z_n \in B(x_N, \frac{1}{n})$

En effet $z_n = y_{\sigma_1 \circ \dots \circ \sigma_N(\sigma_n(n))}$

$(z_n)_{n \geq 0}$ est une suite de $(y_n)_{n \geq 0}$ qui est de Cauchy. Elle converge vers un point $z \in X$ et donc $(x_{\sigma(n)})_{n \geq 0}$ converge vers z .

(12)

15 Théorème Soit (X, d) un espace métrique. Soit μ une mesure de probabilité sur $\mathcal{B}_X$. Alors μ est portivement régulière : pour tout $B \in \mathcal{B}_X$

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists K \text{ compact} \exists U \text{ ouvert} \text{ tels que } K \subset B \subset U \text{ et } \mu(U \setminus K) < \varepsilon$$

preuve Soit $S \subset X$ une partie dense dénombrable. On sait que μ est régulière. Soit $\varepsilon > 0$ et $B \in \mathcal{B}_X$. On peut trouver : F , fermé, U , ouvert, tels que

$$F \subset B \subset U \text{ et } \mu(U \setminus F) < \frac{\varepsilon}{2}$$

Pour tout $n \geq 1$ $(B(a_i, \frac{1}{n}))_{i \in S}$ est un recouvrement de X . On énumère S : $S = \{a_1, a_2, \dots\}$. Pour tout $n \geq 1$,

$$F = \bigcup_{k \geq 1} B(a_k, \frac{1}{n}) \cap F$$

On peut trouver M_n tel que, si $A_n = \bigcup_{k=1}^{M_n} B(a_k, \frac{1}{n}) \cap F$ alors $\mu(F \setminus A_n) < \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}$ On pose.

$$A = \bigcap_{n \geq 1} A_n$$

$$\text{Alors } F \setminus A = \bigcup_{n \geq 1} F \setminus A_n$$

$$\mu(F \setminus A) \leq \sum_{n \geq 1} \frac{\varepsilon}{2^{n+1}} = \frac{\varepsilon}{2}$$

On pose $K = \bar{A}$. Alors $K \subset F$ (car F est fermé), $A \subset K$, $\mu(F \setminus K) < \frac{\varepsilon}{2}$, et K est compact car A est totalement bornée (ou précompact). On vient bien de montrer que

$$K \subset B \subset U \text{ et } \mu(U \setminus K) = \mu(U \setminus F) + \mu(F \setminus K) < \varepsilon$$

Que peut-on dire de $\mathcal{C}_c^\infty(X, \mathbb{R})$: dans le cas d'un espace métrique polonais X ?

Paradoxe Beaucoup de compact mais peu de fonctions $\mathcal{C}_c^\infty$ support compact

16 Remarque Soit $X = \mathbb{R}^\mathbb{N}$ l'ensemble des suite de réels muni de la topologie produit. X est polonais mais $\mathcal{C}_c^\infty(X, \mathbb{R}) = \{0\}$. En effet si $f \in \mathcal{C}_c^\infty(X, \mathbb{R})$ et $f \neq 0$, alors $\{f \neq 0\}$ est un ouvert et par définition de la topologie produit contient un ouvert cylindrique de la forme $U_0 \times \dots \times U_N \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \dots$ où $U_0, \dots, U_N$ sont des ouverts de $\mathbb{R}$. Un tel ouvert n'est pas compact. Le support de f n'est pas compact.

Nécessité d'avoir beaucoup d'ouverts compacts $\rightarrow$ est top. loc. compact

17 Exemple Soit $X = \mathbb{R}^d$, $\mu : \mathcal{B}_X \rightarrow \mathbb{R}^+$ une mesure de Radon (i.e. finie sur les compacts). Alors $\mathcal{C}_c^\infty(X, \mathbb{R})$ est dense dans $L^1(X, \mu)$.

preuve Soit $f \in L^1(X, \mu)$ et $\varepsilon > 0$. Par le théorème de convergence dominée

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{B(0,R)} f \, d\mu = \int f \, d\mu$$

Il existe $R > 0$ tel que $\|f - f \mathbb{1}_{B(0,R)}\|_{L^1} < \frac{\varepsilon}{3}$

$X_R = B(0,R)$ est polonais et

$$\mu_R(A) = \frac{\mu(A)}{\mu(B(0,R))} \quad \forall A \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}^d}, A \subset B(0,R)$$

est une proba.

$\mathcal{C}_c^\infty(X, \mathbb{R})$ est dense dans $L^1(X_R, \mu_R)$.

Il existe $g \in \mathcal{C}_c^\infty(X, \mathbb{R})$ tel que $\|g - f \mathbb{1}_{B(0,R)}\|_{L^1(\mu_R)} < \frac{\varepsilon}{3 \mu(B(0,R))}$

$$\|\tilde{g} - f\|_{L^1(\mathbb{R}^d, \mu)} < \frac{\varepsilon}{3}$$

où $\tilde{g}$ est prolongé de g par 0 sur $\mathbb{R}^d \setminus B(0,R)$

Soit $p_\eta : \mathbb{R}^d \rightarrow [0,1]$ continue telle que

$$p_\eta(x) = 1 \quad \text{si } x \in B(0, R-2\eta)$$

$$p_\eta(x) = 0 \quad \text{si } x \notin B(0, R-\eta)$$

on pose $g_\eta = \tilde{g} p_\eta$. Alors $g_\eta \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$. De plus

$$\text{supp}(g_\eta) \subset B(0, R-\eta). \quad \text{Donc } g_\eta \in \mathcal{C}_c^0(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}).$$

Comme $g_\eta \rightarrow g$ simplement et $|g_\eta| \leq |g|$

Par convergence dominée.

$$L_1 - \lim_{\eta \rightarrow 0} g_\eta = \tilde{g} \quad (\text{dans } L^1(\mathbb{R}^d, \mu))$$

il existe η tel que

$$\|g_\eta - \tilde{g}\|_{L^1(\mathbb{R}^d, \mu)} < \frac{\varepsilon}{3}$$

$$\text{Conclusion } \|f - g_\eta\|_{L^1(\mathbb{R}^d, \mu)} < \varepsilon.$$

18. Remarque Si X est loc. compact à base dénombrable d'ouverts, et si μ est une mesure de Radon, alors $\mathcal{C}_c^0(X, \mathbb{R})$ est dense dans $L^1(X, \mu)$.